Sveučilište u Zagrebu

PRIRODOSLOVNO - MATEMATIČKI FAKULTET
MATEMATIČKI ODSJEK

Tea Martinić

Realizacija Liejevih algebri i diferencijalni račun na nekomutativnim prostorima

DOKTORSKI RAD

Zagreb, 2016.

University of Zagreb

FACULTY OF SCIENCE
DEPARTMENT OF MATHEMATICS

Tea Martinić

Realization of Lie alebras and differential calculus on noncommutative spaces

DOCTORAL THESIS

Zagreb, 2016.

Sveučilište u Zagrebu

PRIRODOSLOVNO - MATEMATIČKI FAKULTET
MATEMATIČKI ODSJEK

Tea Martinić

Realizacija Liejevih algebri i diferencijalni račun na nekomutativnim prostorima

DOKTORSKI RAD

Mentor:
prof.dr.sc. Saša Jurić-Krešić

Zagreb, 2016.

University of Zagreb

FACULTY OF SCIENCE
DEPARTMENT OF MATHEMATICS

Tea Martinić

Realization of Lie alebras and differential calculus on noncommutative spaces

DOCTORAL THESIS

Supervisor:
prof.dr.sc. Saša Jurić-Krešić

Zagreb, 2016.

Zahvale

Hvala mom mentoru profesoru Saši Krešić Juriću koji je svojom pedantnošću i bogatim stručnim znanjem doprinio izradi ovoga rada. Hvala mu na svim savjetima i idejama, još više na strpljenju i razumijevanju.

Zahvaljujem profesoru Stjepanu Meljancu s Instituta Ruđer Bošković na dragocjenoj suradnji. Hvala članovima Povjerenstva profesorima Draženu Adamoviću i Ozrenu Peršeu, a posebno kolegi Gordanu Radobolji na korisnim savjetima tijekom doktorskog studija.

Zahvaljujem obitelji i prijateljima koji su bili uz mene cijelo vrijeme i podržavali me u mome izboru.

Na kraju, hvala onima koji su na određen način utkali dio sebe u ovaj rad svojom bezuvjetnom ljubavlju i podrškom i pomogli mi da izdržim do kraja. Duje, mama, tata, Jure – hvala vam...

Abstract

In the first part of the thesis we study extensions of a Lie algebra $\mathfrak{g}_0$ with basis $\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ by an Abelian familiy of generators $T_{\mu\nu}$, $1 \leq \mu, \nu \leq n$, which act on the enveloping algebra $U(\mathfrak{g}_0)$. This action describes the commutation relations betwee X_μ and arbitrary monomials in $U(\mathfrak{g}_0)$. Furthermore, we study realizations of the Lie algebra $\mathfrak{g}_0$, i.e. embedding of $\mathfrak{g}_0$ into $\hat{A}_n$ where $\hat{A}_n$ is the completion of the n-th Weyl algebra A_n by the degree of the differential operator $\partial_1^{k_1}\partial_2^{k_2}\ldots\partial_n^{k_n}$. In particular, we study realizations which induce the symmetric ordering on the enveloping algebra $U(\mathfrak{g}_0)$. Using properties of the extended Lie algebra it is shown that the corresponding symmetric realization is given in terms of the generating function for the Bernoulli numbers. To each realization of the Lie algebra $\mathfrak{g}_0$ one can associate a star–product on the symmetric algebra $X = \mathbb{C}[x_1, x_2, \ldots, x_n] \subset A_n$ which is defined using the canonical action of the algebra A_n on the subalgebra X. We introduce the notion of left–right dual star–products and the corresponding realizations. The left–right duality is studied in detail in case of the symmetric realization using the aforementioned extension of the Lie algebra $\mathfrak{g}_0$. The second part of the thesis deals with bicovariant differential calculus on the quantum space $U(\mathfrak{g}_0)$. For this purpose we construct a Lie superalgebra $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$ where the basis elements $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m$ of the odd part $\mathfrak{g}_1$ are interpreted as one–forms on the space $U(\mathfrak{g}_0)$. By generalising the result from the first part of the thesis we obtain an extension of $\mathfrak{g}$ by an Abelian family of generators $T_{\mu\nu}$ whose action on the enveloping algebra $U(\mathfrak{g})$ describes

the commutation relations between one–forms and monomials in $U(\mathfrak{g}_0)$. We also construct a realization, i.e. an embedding of the superalgebra $\mathfrak{g}$ into a completion of the Clifford–Weyl algebra $\hat{A}_{n,m}$. In case when $dim(\mathfrak{g}_0) = dim(\mathfrak{g}_1)$ we define an exterior derivative $d\colon U(\mathfrak{g}_0) \to \Omega$ where $\Omega = \oplus_{\mu=1}^{n} U(\mathfrak{g}_0)\xi_\mu$ is an $U(\mathfrak{g}_0)$–bimodule. The first order differential calculus (d, Ω) is bicovariant with respect to the primitive Hopf structure of $U(\mathfrak{g}_0)$. Using the realization of the Lie superalgebra $\mathfrak{g}$, the differential calculus is obtained as a deformation of the classical differential calculus on the Euclidean space.

Sažetak

U prvom dijelu disertacije se proučavaju proširenja Liejeve algebre $\mathfrak{g}_0$ generirane bazom $\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ s Abelovom familijom generatora $T_{\mu\nu}$, $1 \leq \mu, \nu \leq n$, koji djeluju na omotačku algebru $U(\mathfrak{g}_0)$. Pomoću tako definiranog djelovanja možemo opisati komutacijske relacije između X_μ i proizvoljnih monoma u $U(\mathfrak{g}_0)$. Nadalje, proučavamo realizacije Liejeve algebre $\mathfrak{g}_0$, tj. njezina ulaganja u $\hat{A}_n$ gdje je $\hat{A}_n$ upotpunjenje n–te Weylove algebre A_n obzirom na stupanj diferencijalnog operatora $\partial_1^{k_1}\partial_2^{k_2}\ldots\partial_n^{k_n}$. Posebno se proučavaju realizacije koje induciraju simetrično uređenje na omotačkoj algebri $U(\mathfrak{g}_0)$. Koristeći svojstva proširene Liejeve algebre pokazano je da je odgovarajuća simetrična realizacija izražena pomoću funkcije izvodnice za Bernoullijeve brojeve. Svakoj realizaciji Liejeve algebre $\mathfrak{g}_0$ pridružen je zvijezda–umnožak (engl. star–product) na simetričnoj algebri $X = \mathbb{C}[x_1, x_2, \ldots, x_n] \subset A_n$ koji se definira pomoću kanonskog djelovanja algebre A_n na podalgebru X. Uveden je pojam lijevo–desno dualnih zvijezda–umnožaka i njihovih pripadnih realizacija. Lijevo–desna dualnost detaljno je proučena u slučaju simetrične realizacije gdje se koristi konstruirano proširenje Liejeve algebre $\mathfrak{g}_0$. Drugi dio disertacije se bavi bikovarijantnim diferencijalnim računom na kvantnom prostoru $U(\mathfrak{g}_0)$. U tu svrhu konstruirana je Liejeve superalgebra $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$ gdje se elementi baze $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m$ neparnog dijela $\mathfrak{g}_1$ interpretiraju kao jedan–forme na prostoru $U(\mathfrak{g}_0)$. Generalizacijom rezultata iz prvog dijela disertacije dobiveno je proširenje od $\mathfrak{g}$ s Abelovom familijiom generatora $T_{\mu\nu}$ čije djelovanje na omotačku algebru $U(\mathfrak{g})$ opisuje komutacijske relacije između jedan-

formi i monoma u $U(\mathfrak{g}_0)$. Također je konstruirana realizacija, tj. ulaganje superalgebre $\mathfrak{g}$ u upotpunjenje Clifford–Weylove algebre $\hat{A}_{n,m}$. U slučaju kada je $dim(\mathfrak{g}_0) = dim(\mathfrak{g}_1)$ definirana je vanjska derivacija $d\colon U(\mathfrak{g}_0) \to \Omega$ gdje je $\Omega = \oplus_{\mu=1}^{n} U(\mathfrak{g}_0)\xi_\mu$ bimodul nad $U(\mathfrak{g}_0)$. Diferencijalni račun prvog reda (d, Ω) je bikovarijantan obzirom na primitivnu Hopfovu strukturu od $U(\mathfrak{g}_0)$. Koristeći realizaciju Liejeve superalgebre $\mathfrak{g}$, diferencijalni račun je dobiven kao deformacija klasičnog diferencijalnog računa na Euklidskom prostoru.

Sadržaj

Poglavlje 1

Uvod

Zadnjih godina postoji veliki interes u istraživanju nekomutativnih prostora, njihove strukture i njihovih primjena u fizici [1, 2, 3, 4, 5], naročito u proučavanju strukture prostor-vremena na Planckovoj skali. Problemi koji se proučavaju vezani su uz matematički formalizam potreban za opis nekomutativnih prostora, njihove simetrije te algebarska i geometrijska svojstva. Prvi primjer nekomutativnog prostora uveo je Snyder [6] kao model nekomutativnog prostora invarijantnog na Lorentzove transformacije. Drugi model nekomutativnog prostora je tzv. kanonski prostor čije komutacijske relacije ovise o antisimetričnom tenzoru drugog reda. Ovaj tip prostora ima primjene u teoriji struna i nekomutativnoj kvantnoj teoriji polja [3]. Majid i Ruegg uveli su κ-deformirani prostor Minkowskog čije koordinate zatvaraju Liejevu algebru [7]. Komutacijske relacije ovise o parametru deformacije κ koji je povezan s Planckovom duljinom. Motivacija za proučavanje ovog prostora leži u činjenici da je kovarijantan s obzirom na djelovanje κ-Poincaréove algebre koja je deformacija Poincaréove algebre. Prostor κ-Minkowskog ima važnu ulogu u matematičkom formalizmu deformirane specijalne teorije relativnosti [8] i u algebarskom pristupu kvantnoj gravitaciji. Također se proučava generalizacija κ-deformiranog prostora čije komutacijske relacije ovise o deformacijskom vektoru $a \in \mathbb{R}^n$. Drugi tipovi nekomutativnih prostora uključuju ujedinjenje κ-deformiranog prostora i kanonskog prostora što je prvi put korišteno u proučavanju Wess-Zumino-Witten modela [9]. Problem generalizacije ujedinjenog κ-deformiranog i kanonskog prostora proučavan je u radu [10] gdje je teorija primjenjena na Nappi-Witten tip nekomutativnog prostora. Jedan od matematičkih problema koji imaju vrlo važnu primjenu u teorijskoj fizici je konstrukcija diferencijalnog računa na nekomutativnim prostorima [5, 11, 12, 13, 14, 15, 16]. Jedan od osnovnih alata u proučavanju matematičke strukture nekomutativnih prostora tipa Liejeve algebre je metoda koja koristi realizacije njegovih generatora u algebri formalnih redova diferencijalnih operatora [17, 18, 19]. Svakoj realizaciji možemo pridružiti i zvijezda-umnožak [10, 13, 19, 20, 21, 22]. Ovaj umnožak je važan kao jedan od pristupa u teoriji deformacijske kvantizacije [20]. Matematička struktura deformiranih algebri funkcija kod kojih je komutativni umnožak zamijenjen zvijezda-umnoškom vrlo je važna u teoriji kvantizacije i formulaciji kvantne mehanike na faznom prostoru. Zvijezda-umnožak se može poopćiti i na diferencijalnu algebru tj. na forme višeg reda [16]. Uz problem konstrukcije diferencijalnog računa prirodno se vežu i problemi konstrukcije vektorskog polja i Liejeve derivacije na nekomutativnim prostorima [12]. Tema ovog istraživanja je proučavanje matematičke strukture nekomutativnih prostora tipa Liejeve algebre. Kod ovog tipa prostora algebra koordinata je dana kao omotačka algebra $U(\mathfrak{g})$ neke konačnodimenzionalne Liejeve algebre $\mathfrak{g}$. Rezultati dobiveni u drugom i trećem poglavlju su objavljeni u članku [36].

U drugom poglavlju proučavamo proširenja konačnodimenzionalne Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ generirane bazom $\{X_1, \ldots, X_n\}$ čiji elementi zadovoljavaju komutacijske relacije $[X_\mu, X_\nu] = \sum_{\alpha=1}^{n} C_{\mu\nu\alpha} X_\alpha$. Ideja je proširiti Liejevu algebru $\mathfrak{g}$ s Abelovom familijom operatora $T_{\mu\nu}$ koji djeluju na omotačku algebru $U(\mathfrak{g})$ te ćemo takvo proširenje označiti sa $\mathfrak{g}^L$. Na analogan način ćemo $\mathfrak{g}$ prošiti sa operatorima $T_{\mu\nu}^{-1}$ koje ćemo označiti sa $\mathfrak{g}^R$. Motiv za proširenjem Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ s operatorima $T_{\mu\nu}$ ($T_{\mu\nu}^{-1}$) leži u činjenici da pomoću djelovanja operatora $T_{\mu\nu}$ ($T_{\mu\nu}^{-1}$) na $U(\mathfrak{g})$ možemo izraziti pomicanje elemenata

X_μ na desnu (lijevu) stranu u monomu $X_1^{\nu_1}\cdots X_n^{\nu_n}\in U(\mathfrak{g})$, odnosno opisati komutacijske relacije između X_μ i proizvoljnog monoma u $U(\mathfrak{g})$. Konačno ćemo definirati asocijativnu algebru H generiranu sa $n+2n^2$ elemenata $X_\mu, T_{\mu\nu}$ i $T_{\mu\nu}^{-1}$. U algebri H ćemo definirati elemente $Y_\mu=\sum_{\alpha=1}^n X_\alpha T_{\mu\alpha}^{-1}$ te ćemo pokazati da tako definirani elementi komutiraju sa generatorima X_ν. Prethodni rezultat ćemo kasnije iskoristiti kod proučavanja simetričnih realizacija Liejeve algebre $\mathfrak{g}$.

U trećem poglavlju ćemo proučavati realizacije Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ i pridružene im zvijezda-umnoške na simetričnoj algebri $S(\mathfrak{g})$. Pod realizacijom Liejeve algebre smatrat ćemo ulaganja od $\mathfrak{g}$ u $\hat{A}_n$, gdje smo sa $\hat{A}_n$ označili upotpunjenje Weylove algebre A_n s obzirom na stupanj diferencijalnog operatora ∂_μ. Promatrat ćemo realizacije oblika $\varphi(X_\mu)=\sum_{\alpha=1}^n x_\alpha\varphi_{\alpha\mu}(\partial)$, gdje je $\varphi_{\alpha\mu}(\partial)$ formalni red potencija u operatorima $\partial_1,\ldots\partial_n$ koji ovisi o strukturnim konstantama $C_{\mu\nu\alpha}$. Komutacijske relacije u $\mathfrak{g}$ impliciraju da funkcije $\varphi_{\alpha\mu}$ zadovoljavaju sistem parcijalnih jednadžbi čija rješenja općenito ovise o parametarskim funkcijama. Realizaciju Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ interpretiramo kao deformaciju komutativnih koordinata x_μ. Uz realizacije univerzalne omotačke algebre usko je vezan i pojam zvijezda-umnoška (engl. star-product) na simetričnoj algebri $X=S(\mathfrak{g})$. Simetrična algebra X je izomorfna sa $U(\mathfrak{g})$ kao vektorski prostor. Ovaj izomorfizam se može konstruirati pomoću kanonskog djelovanja algebre A_n na podalgebru X. Koristeći navedeno djelovanje definirat ćemo zvijezda-umnožak na prostoru X koji predstavlja deformaciju komutativnog množenja na X. Zvijezda umnožak ovisi o strukturnim konstantama Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ i prelazi u komutativno množenje u limesu kada strukturne konstante iščezavaju. Prostor X je unitalna asocijativna algebra s obzirom na zvijezda umnožak. Konačno, može se pokazati da je omotačka algebra $U(\mathfrak{g})$ izomorfna algebri X sa zvijezda-umnoškom, a izomorfizam ovisi o realizaciji Liejeve algebre $\mathfrak{g}$. Nadalje, posebno ćemo proučavati realizacije koje induciraju simetrično uređenje na omotačkoj algebri $U(\mathfrak{g})$. Pokazat ćemo da je odgovarajuća realizacija od $\mathfrak{g}$ izražena preko funkcije izvodnice za Bernoullijeve brojeve. Liejevoj algebri $\mathfrak{g}$ ćemo pridružiti lijevo-desnu dualnu Liejevu algebru iste dimenzije te ćemo definirati pojam lijevo-desno dualnih zvijezda umnožaka. Proučavat ćemo odnose između dualnih realizacija Liejevih algebri i dualnih zvijezda-umnožaka. Posebno ćemo teoriju dualnosti detaljno proučavati u slučaju simetrične realizacije, gdje ćemo koristiti operatore $T_{\mu\nu}$ definirane u drugom poglavlju.

U četvrtom poglavlju ćemo primijeniti gore opisanu teoriju na κ-deformiranom prostoru $\mathfrak{g}_\kappa$ kao jednom od najvažnijih primjera nekomutativnog prostora tipa Liejeve algebre. Ovaj prostor je definiran komutacijiskim relacijama $[X_\mu, X_\nu] = (a_\mu X_\nu - a_\nu X_\mu),\ 1 \leq \mu, \nu \leq n$ te predstavlja deformaciju Euklidskog prostora ukoliko je deformacijski vektor $a \in \mathbb{R}^n$ ili deformaciju prostora Minkowskog ukoliko je $a \in \mathbb{R}^n_1$. Za ilustraciju, proučavat ćemo linearnu i simetričnu realizaciju prostora $\mathfrak{g}_\kappa$.

U petom poglavlju ćemo proučavati diferencijalni račun na nekomutativnim prostorima. Na početku poglavlja navodimo osnovne definicije vezane za konstrukciju diferencijalnog računa na algebrama i kvantnim prostorima [23]. Navest ćemo i osnovne definicije vezane za Liejeve superalgebre jer ćemo konstruirati diferencijalni račun na $U(\mathfrak{g})$, gdje je $\mathfrak{g}$ Liejeva superalgebra. Ideja je proširiti Liejevu algebru $\mathfrak{g}_0$ sa jedan-formama ξ_μ na način da konstruiramo Liejevu superalgebru $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$, gdje su $\mathfrak{g}_o = span\{X_1, \ldots, X_n\}$ i $\mathfrak{g}_1 = span\{\xi_1, \ldots, \xi_m\}$. Elementi baze od $\mathfrak{g}$ zadovoljavaju superkomutatore $[\ X_\mu, X_\nu] = \sum_{\alpha=1}^n C_{\mu\nu\alpha} X_\alpha,\ [\ \xi_\mu, \xi_\nu] = 0,\ [\ \xi_\mu, X_\nu] = \sum_{\alpha=1}^m K_{\mu\nu\alpha} X \xi_\alpha.$, a njihove stupnjeve ćemo definirati sa $|X_\mu| = 0$ i $|\xi_\nu| = 1$.

Liejevu algebru $\mathfrak{g}$ ćemo analogno kao i u prvom poglavlju proširiti Abelovom familijom operatora $T_{\mu\nu}$(odnosno $T^{-1}_{\mu\nu}$) te dati formule za njihovo djelovanje na omotačku algebru $U(\mathfrak{g})$. Sa $A_{n,m}$ ćemo označiti Clifford-Weylovu superalgebru generiranu bazom $\{z_i, D_j \mid i, j = 1 \ldots n+m\}$, gdje je $z_i = x_i,\ i = 1, \ldots, n,\ z_{i+n} = \xi_i,\ i = 1, \ldots, m$ i $D_j = \partial_j,\ j = 1, \ldots, n\ ,\ D_{j+n} = q_j,\ j = 1, \ldots, m$ te ćemo razmatrati realizacije Liejeve algebre superalgebre $\mathfrak{g}$ u upotpunjenju Weylove superalgebre $A_{n,m}$ s obzirom na stupanj diferencijalnog operatora D_μ, $\mu = 1, 2, \ldots, n+m$. Konačno ćemo konstruirati vanjsku derivaciju d na $U(\mathfrak{g})$ kao linearni operator za kojeg vrijedi Leibnitzovo pravilo i $d(X_\mu) = \xi_\mu$. Konstrukciju vanjske derivacije provodimo u slučaju kada je broj jedan-formi ξ_μ jednak broju nekomutativnih koordinata X_μ. Pokazat ćemo da je tako konstruirani diferencijalni račun bikovarijantan s obzirom na Hopfovu strukturu $U(\mathfrak{g}_0)$. Na kraju ćemo promatrati realizaciju vanjske derivacije $\hat{d}$ u Clifford-Weylovu algebru $A_{n,n}$. Definirat ćemo $\hat{d}\colon \hat{A}_{n,n} \to \hat{A}_{n,n}$ sa $\hat{d}(\varphi(X_\mu)) = [\hat{d}_0, \varphi(X_\mu)]$, za neki element $\hat{d}_0 \in \hat{A}_{n,n}$ kojeg ćemo odrediti tako da vrijedi $\hat{d}(\varphi(X_\mu)) = \varphi(\xi_\mu)$.

Poglavlje 2

Proširenja Liejevih algebri i lijevo desna dualnost

Neka je $\mathfrak{g}$ konačnodimenzionalna Liejeva algebra nad poljem $\mathbb{K}$ karakteristike 0. Neka je $\{X_1, \ldots, X_n\}$ uređena baza od $\mathfrak{g}$ za čije elemente vrijede sljedeće relacije:

$$[X_\mu, X_\nu] = \sum_{\alpha=1}^{n} C_{\mu\nu\alpha} X_\alpha, \tag{2.1}$$

gdje su $C_{\mu\nu\alpha}$ strukturne konstante od $\mathfrak{g}$. Strukturne konstante zadovoljavaju

$$C_{\mu\nu\alpha} = -C_{\nu\mu\alpha} \tag{2.2}$$

i Jacobijev identitet:

$$\sum_{\rho=1}^{n} (C_{\mu\alpha\rho} C_{\rho\beta\nu} + C_{\alpha\beta\rho} C_{\rho\mu\nu} + C_{\beta\mu\rho} C_{\rho\alpha\nu}) = 0. \tag{2.3}$$

Da bi motivirali našu daljnju raspravu promotrimo prvo jednostavan problem. Ako identificiramo X_μ s njegovom kanonskom slikom u univerzalnoj omotačkoj algebri $U(\mathfrak{g})$, tada izraz (2.1) možemo zapisati kao

$$X_\mu X_\nu = \sum_{\alpha=1}^{n} p_{\mu\alpha}(X_\nu) X_\alpha, \tag{2.4}$$

gdje je $p_{\mu\alpha}(X_\nu) = \delta_{\mu\alpha}X_\nu + C_{\mu\nu\alpha}$. Općenito, ako je $X \in U(\mathfrak{g})$ monom, tada pomicanjem elementa X_μ na desnu stranu u umnošku $X_\mu X$ generiramo polinome $p_{\mu\alpha}(X)$ takve da vrijedi

$$X_\mu X = \sum_{\alpha=1}^{n} p_{\mu\alpha}(X)X_\alpha. \tag{2.5}$$

Polinom $p_{\mu\alpha}(X)$ je jedinstveni polinom oblika $p_{\mu\alpha}(X) = \delta_{\mu\alpha}X +$ *članovi nižeg reda*. Pokazat ćemo da su polinomi $p_{\mu\alpha}(X)$ vezani uz problem proširenja Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ s Abelovom familijom generatora $T_{\mu\nu}$ koji djelujući na $U(\mathfrak{g})$ generiraju polinome $p_{\mu\alpha}(X)$, tj. $T_{\mu\nu} \blacktriangleright X = p_{\mu\alpha}(X)$.

S druge strane, neka su $\tilde{p}_{\alpha\mu}(X)$ polinomi generirani pomicanjem generatora X_μ na lijevu stranu u umnošku XX_μ tako da je

$$XX_\mu = \sum_{\alpha=1}^{n} X_\alpha \tilde{p}_{\alpha\mu}(X). \tag{2.6}$$

Pokazat ćemo da se Liejeva algebra $\mathfrak{g}$ može proširiti s Abelovom familijom operatora $S_{\mu\alpha}$ tako da vrijedi $S_{\mu\alpha} \blacktriangleright X = \tilde{p}_{\alpha\mu}(X)$.

Neka je $\mathfrak{g}^L$ proširenje Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ skupom generatora $\{T_{\mu\nu} \mid 1 \leq \mu, \nu \leq n\}$ za koje vrijede relacije:

$$[T_{\mu\nu}, T_{\alpha\beta}] = 0, \tag{2.7}$$

$$[T_{\mu\nu}, X_\lambda] = \sum_{\alpha=1}^{n} C_{\mu\lambda\alpha}T_{\alpha\nu}. \tag{2.8}$$

Da bi pokazali da je ovim relacijama definirana struktura Liejeve algebre moramo provjeriti da su zadovoljeni svi Jacobijevi identiteti. Jedini netrivijalni Jacobijev identitet je

$$\begin{aligned} &[[T_{\alpha\beta}, X_\mu], X_\nu] + [[X_\mu, X_\nu], T_{\alpha\beta}] + [[T_{\alpha\beta}, X_\nu], X_\mu] \\ &= \sum_{\kappa=1}^{n}\sum_{\rho=1}^{n}[C_{\alpha\mu\kappa}C_{\kappa\nu\rho} + C_{\mu\nu\kappa}C_{\kappa\alpha\rho} + C_{\nu\alpha\kappa}C_{\kappa\mu\rho}]T_{\rho\beta} = 0, \end{aligned} \tag{2.9}$$

gdje smo koristili relaciju (2.3).

Teorem 2.1 *Neka je* $U(\mathfrak{g}^L) \otimes U(\mathfrak{g}) \to U(\mathfrak{g})$ *linearno preslikavanje ,* $a \otimes X \to a \blacktriangleright X$*, definirano sljedećim relacijama:*

$$1 \blacktriangleright X = X, \quad X_\mu \blacktriangleright X = X_\mu X, \tag{2.10}$$

$$T_{\mu\nu} \blacktriangleright 1 = \delta_{\mu\nu} 1, \quad (ab) \blacktriangleright X = a \blacktriangleright (b \blacktriangleright X), \tag{2.11}$$

gdje su $X \in U(\mathfrak{g}),\ a, b \in U(\mathfrak{g}^L)$*. Tada je* $\blacktriangleright$ *lijevo djelovanje univerzalne omotačke algebre* $U(\mathfrak{g}^L)$ *na* $U(\mathfrak{g})$ *za koje vrijedi*

$$T_{\mu\nu} \blacktriangleright (XY) = \sum_{\alpha=1}^{n} (T_{\mu\alpha} \blacktriangleright X)(T_{\alpha\nu} \blacktriangleright Y),\ \forall X, Y \in U(\mathfrak{g}). \tag{2.12}$$

Dokaz Prvo ćemo pokazati da je uz pretpostavke (2.10)-(2.11) relacija (2.12) jedinstveno određena komutacijskim relacijama na $U(g^L)$ i normalizacijskim uvjetom $T_{\mu\nu} \blacktriangleright 1 = \delta_{\mu\nu} 1$. Iz relacije (2.8) slijedi da je

$$[T_{\mu\nu}, X_\lambda] \blacktriangleright 1 = (\sum_{\alpha=1}^{n} C_{\mu\lambda\alpha} T_{\alpha\nu}) \blacktriangleright 1 \tag{2.13}$$

što uz relacije (2.10)-(2.11) povlači

$$T_{\mu\nu} \blacktriangleright (X_\lambda \blacktriangleright 1) - X_\lambda \blacktriangleright (T_{\mu\nu} \blacktriangleright 1) = \sum_{\alpha=1}^{n} C_{\mu\lambda\alpha} \delta_{\alpha\mu}, \tag{2.14}$$

$$T_{\mu\nu} \blacktriangleright X_\lambda = \delta_{\mu\nu} X_\lambda + C_{\mu\lambda\nu}. \tag{2.15}$$

Neka je sada Y proizvoljni element iz $U(\mathfrak{g})$. Pokažimo prvo da vrijedi sljedeći identitet:

$$T_{\mu\nu} \blacktriangleright (X_\lambda Y) = [T_{\mu\nu}, X_\lambda] \blacktriangleright Y + X_\lambda (T_{\mu\nu} \blacktriangleright Y). \tag{2.16}$$

Primjetimo da je

$$[T_{\mu\nu}, X_\lambda Y] \blacktriangleright 1 = T_{\mu\nu} \blacktriangleright (X_\lambda Y) - X_\lambda Y (T_{\mu\nu} \blacktriangleright 1), \tag{2.17}$$

iz čega slijedi

$$T_{\mu\nu} \blacktriangleright (X_\lambda Y) = [T_{\mu\nu}, X_\lambda Y] \blacktriangleright 1 + X_\lambda Y (T_{\mu\nu} \blacktriangleright 1). \tag{2.18}$$

S druge strane koristeći Leibnizovo pravilo imamo da je

$$\begin{aligned}[T_{\mu\nu}, X_\lambda Y] \blacktriangleright 1 &= ([T_{\mu\nu}, X_\lambda]Y + X_\lambda[T_{\mu\nu}, Y]) \blacktriangleright 1 \\ &= [T_{\mu\nu}, X_\lambda] \blacktriangleright Y + X_\lambda(T_{\mu\nu} \blacktriangleright Y) - X_\lambda Y(T_{\mu\nu} \blacktriangleright 1). \end{aligned} \tag{2.19}$$

Sada uvrštavajući (2.19) u (2.18) dobijamo traženi identitet (2.16). Iz relacije (2.8) i identiteta (2.18) slijedi

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu} \blacktriangleright (X_\lambda Y) &= \sum_{\alpha=1}^{n} C_{\mu\lambda\alpha}(T_{\alpha\nu} \blacktriangleright Y) + X_\lambda(T_{\mu\nu} \blacktriangleright Y) \\ &= \sum_{\alpha=1}^{n}(C_{\mu\lambda\alpha} + \delta_{\mu\alpha}X_\lambda)(T_{\alpha\nu} \blacktriangleright Y) \\ &= \sum_{\alpha=1}^{n}(T_{\mu\alpha} \blacktriangleright X_\lambda)(T_{\alpha\nu} \blacktriangleright Y). \end{aligned} \tag{2.20}$$

Ovim smo pokazali da relacija (2.12) vrijedi za sve monome X_λ stupnja jedan. Kao korak indukcije pretpostavimo da (2.12) vrijedi za sve monome X stupnja k. Tada za monome stupnja $k+1$ vrijedi

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu} \blacktriangleright ((X_\lambda X)Y) &= \sum_{\alpha=1}^{n}(T_{\mu\alpha} \blacktriangleright X_\lambda)(T_{\alpha\nu} \blacktriangleright (XY)) \\ &= \sum_{\beta=1}^{n}(\sum_{\alpha=1}^{n}(T_{\mu\alpha} \blacktriangleright X_\lambda)(T_{\alpha\beta} \blacktriangleright X))(T_{\beta\nu} \blacktriangleright Y) \\ &= \sum_{\beta=1}^{n}(T_{\mu\beta} \blacktriangleright (X_\lambda X))(T_{\beta\nu} \blacktriangleright Y). \end{aligned} \tag{2.21}$$

Stoga, dokazali smo da relacija (2.12) vrijedi za sve monome X iz $U(\mathfrak{g})$ te je linearno možemo proširiti na sve elemente iz $U(\mathfrak{g})$.

Sljedeći korak je pokazati da je djelovanje $\blacktriangleright$ dobro definirano. Da bi to dokazali moramo provjeriti da relacija (2.1) leži u jezgri djeovanja i da je konzistentna s relacijama u $U(\mathfrak{g}^L)$. Ovo očito vrijedi za djelovanje od X_μ, stoga tvrdnju trebamo provjeriti samo za djelovanje od $T_{\mu\nu}$. Koristeći (2.12) dobivamo

$$T_{\mu\nu} \blacktriangleright (X_\alpha X_\beta) = \delta_{\mu\nu}X_\alpha X_\beta + C_{\mu\beta\nu}X_\alpha + C_{\mu\alpha\nu}X_\beta + \sum_{\rho=1}^{n} C_{\mu\alpha\rho}C_{\rho\beta\nu} \tag{2.22}$$

iz čega slijedi

$$T_{\mu\nu} \blacktriangleright [X_\alpha, X_\beta] = \delta_{\mu\nu}[X_\alpha, X_\beta] + \sum_{\rho=1}^{n}(C_{\mu\alpha\rho}C_{\rho\beta\nu} + C_{\beta\mu\rho}C_{\rho\alpha\nu}). \tag{2.23}$$

S druge strane, (2.15) implicira da je

$$T_{\mu\nu} \blacktriangleright \Big(\sum_{\rho=1}^{n} C_{\alpha\beta\rho}X_\rho\Big) = \delta_{\mu\nu}[X_\alpha, X_\beta] - \sum_{\rho=1}^{n} C_{\alpha\beta\rho}C_{\rho\mu\nu}. \tag{2.24}$$

Sada iz Jacobijevog identiteta (2.3) slijedi

$$T_{\mu\nu} \blacktriangleright ([X_\alpha, X_\beta] - \sum_{\rho=1}^{n} C_{\alpha\beta\rho}X_\rho) = \sum_{\rho=1}^{n}(C_{\mu\alpha\rho}C_{\rho\beta\nu} + C_{\alpha\beta\rho}C_{\rho\mu\nu} + C_{\beta\mu\rho}C_{\rho\alpha\nu}) = 0. \tag{2.25}$$

Još nam preostaje pokazati da je djelovanje od $T_{\mu\nu}$ konzistentno s relacijama (2.7) i (2.8). Konzistentnost s relacijom (2.7) ćemo pokazati indukcijom po stupnju monoma $X \in U(\mathfrak{g})$. Za monome stupnja jedan imamo

$$(T_{\alpha\beta}T_{\mu\nu}) \blacktriangleright X_\rho = T_{\alpha\beta} \blacktriangleright (T_{\mu\nu} \blacktriangleright X_\rho) = \delta_{\alpha\beta}\delta_{\mu\nu}X_\rho + \delta_{\mu\nu}C_{\alpha\rho\beta} + \delta_{\alpha\beta}C_{\mu\rho\nu}. \tag{2.26}$$

S obzirom da je izraz (2.26) invarijantan na zamjenu indeksa $(\alpha, \beta) \to (\mu, \nu)$, trivijalno slijedi da je $[T_{\alpha\beta}, T_{\mu\nu}] \blacktriangleright X_\rho = 0$. Kao korak indukcije pretpostavimo da vrijedi da je $[T_{\alpha\beta}, T_{\mu\nu}] \blacktriangleright X = 0$, za sve monome X stupnja k. Tada za monome stupnja $k+1$ vrijedi

$$\begin{aligned}
(T_{\alpha\beta}T_{\mu\nu}) \blacktriangleright (X_\rho X) &= T_{\alpha\beta} \blacktriangleright (T_{\mu\nu} \blacktriangleright (X_\rho X)) \\
&= T_{\alpha\beta} \blacktriangleright (\sum_{\kappa=1}^{n}(\delta_{\mu\kappa}X_\rho + C_{\mu\rho\kappa})(T_{\kappa\nu} \blacktriangleright X)) \\
&= T_{\alpha\beta} \blacktriangleright (X_\rho(T_{\mu\nu} \blacktriangleright X)) + T_{\alpha\beta} \blacktriangleright (\sum_{k=1}^{n} C_{\mu\rho\kappa}(T_{\kappa\nu} \blacktriangleright X) \\
&= X_\rho(T_{\alpha\beta}T_{\mu\nu} \blacktriangleright X) + \sum_{\kappa=1}^{n} C_{\alpha\rho\kappa}(T_{\kappa\beta}T_{\mu\nu} \blacktriangleright X) + \sum_{\kappa=1}^{n} C_{\mu\rho\kappa}(T_{\alpha\beta}T_{\kappa\nu} \blacktriangleright X).
\end{aligned} \tag{2.27}$$

Koristeći pretpostavku indukcije imamo da je

$$[T_{\alpha\beta}, T_{\mu\nu}] \blacktriangleright (X_\rho X) = (T_{\alpha\beta}T_{\mu\nu} - T_{\mu\nu}T_{\alpha\beta}) \blacktriangleright (X_\rho X)$$
$$= X_\rho[T_{\alpha\beta}, T_{\mu\nu}] \blacktriangleright X + \sum_{\kappa=1}^{n} C_{\alpha\rho\kappa}[T_{\kappa\beta}, T_{\mu\nu}] \blacktriangleright X + \sum_{\kappa=1}^{n} C_{\mu\rho\kappa}[T_{\alpha\beta}, T_{\kappa\nu}] \blacktriangleright X = 0. \quad (2.28)$$

Stoga je $[T_{\alpha\beta}, T_{\mu\nu}] \blacktriangleright X = 0$ za sve monome $X \in U(\mathfrak{g})$. Konzistenciju s relacijom (2.8) dobijamo koristeći relaciju (2.15), tj. za svaki monom $X \in U(\mathfrak{g})$ imamo da je

$$\begin{aligned}[T_{\mu\nu}, X_\lambda] \blacktriangleright X &= T_{\mu\nu} \blacktriangleright (X_\lambda X) - X_\lambda(T_{\mu\nu} \blacktriangleright X) \\ &= \sum_{\alpha=1}^{n}(\delta_{\mu\alpha}X_\lambda + C_{\mu\lambda\alpha})(T_{\alpha\nu} \blacktriangleright X) - X_\lambda(T_{\mu\nu} \blacktriangleright X) \\ &= (\sum_{\alpha=1}^{n} C_{\mu\lambda\alpha}T_{\alpha\nu}) \blacktriangleright X. \end{aligned} \quad (2.29)$$

■

Ako je $X \in U(\mathfrak{g})$ monom, tada polinome $T_{\mu\nu} \blacktriangleright X$ možemo izračunati rekurzivno koristeći (2.12) iz

$$T_{\mu\nu} \blacktriangleright (X_\alpha X) = X_\alpha(T_{\mu\nu} \blacktriangleright X) + \sum_{\lambda=1}^{n} C_{\mu\alpha\lambda}(T_{\lambda\nu} \blacktriangleright X). \quad (2.30)$$

Sljedećim rezultatom ćemo pokazati da djelovanje $T_{\mu\nu} \blacktriangleright X$ generira upravo polinome $p_{\mu\alpha}(X)$ iz relacije (2.5).

Lema 2.1 *Neka je $X \in U(\mathfrak{g})$ monom. Ako generator X_μ pomaknemo na desnu stranu u umnošku $X_\mu X$, tada je*

$$X_\mu X = \sum_{\alpha=1}^{n}(T_{\mu\alpha} \blacktriangleright X)X_\alpha. \quad (2.31)$$

Dokaz Dokaz ćemo provesti indukcijom po stupnju monoma X. Koristeći jednadžbu (2.15), za monome stupnja jedan imamo

$$X_\mu X_\nu = X_\nu X_\mu + \sum_{\alpha=1}^{n} C_{\mu\nu\alpha}X_\alpha = \sum_{\alpha=1}^{n}(T_{\mu\alpha} \blacktriangleright X_\nu)X_\alpha. \quad (2.32)$$

Kao korak indukcije pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za sve monome X stupnja k. Sada iz (2.12) za monome stupnja $k+1$ slijedi

$$\begin{aligned}
X_\mu(X_\lambda X) &= \sum_{\alpha=1}^{n}(T_{\mu\alpha} \blacktriangleright X_\lambda)(X_\alpha X) \\
&= \sum_{\alpha=1}^{n}(T_{\mu\alpha} \blacktriangleright X_\lambda)\Big(\sum_{\beta=1}^{n} T_{\alpha\beta} \blacktriangleright X\Big)X_\beta \\
&= \sum_{\beta=1}^{n}\Big[\sum_{\alpha=1}^{n}(T_{\mu\alpha} \blacktriangleright X_\lambda)(T_{\alpha\beta} \blacktriangleright X)\Big]X_\beta \\
&= \sum_{\beta=1}^{n}\Big(T_{\mu\beta} \blacktriangleright (X_\lambda X)\Big)X_\beta. \qquad (2.33)
\end{aligned}$$

Ovim smo pokazali da relacija (2.31) vrijedi za sve monome $X \in U(\mathfrak{g})$. ■

Očito relaciju (2.31) možemo proširiti linearno na sve elemente iz $U(\mathfrak{g})$. Analogno proširenju algebre $\mathfrak{g}$ s operatorima $T_{\mu\nu}$, sada možemo proširiti algebru $\mathfrak{g}$ operatorima $S_{\mu\alpha}$ tako da je $S_{\mu\alpha} \blacktriangleright X = \tilde{p}_{\alpha\mu}(X)$, gdje su polinomi $\tilde{p}_{\alpha\mu}(X)$ generirani pomicanjem elementa X_μ na lijevu stranu u umnošku XX_μ. Uvest ćemo formalnu oznaku $S_{\mu\nu} = T^{-1}_{\mu\nu}$.

Teorem 2.2 *Neka je $\mathfrak{g}^R$ Liejeva algebra sa bazom $\{X_\mu, T^{-1}_{\mu\nu} \mid 1 \leq \mu\nu \leq n\}$ koja zadovoljava relaciju* (2.1) *i relacije*

$$[T^{-1}_{\alpha,\beta}, T^{-1}_{\mu\nu}] = 0, \qquad (2.34)$$

$$[T^{-1}_{\mu\nu}, X_\lambda] = -\sum_{\alpha=1}^{n} C_{\alpha\lambda\nu} T^{-1}_{\mu\alpha}. \qquad (2.35)$$

Tada postoji lijevo djelovanje $\blacktriangleright : U(\mathfrak{g}^R) \otimes U(\mathfrak{g}) \to U(\mathfrak{g})$ za koje vrijedi:

$$1 \blacktriangleright X = X, \quad X_\mu \blacktriangleright X = X_\mu X, \qquad (2.36)$$

$$T^{-1}_{\mu\nu} \blacktriangleright 1 = \delta_{\mu\nu}1, \quad T^{-1}_{\mu\nu} \blacktriangleright (XY) = \sum_{\alpha=1}^{n}(T^{-1}_{\alpha\nu} \blacktriangleright X)(T^{-1}_{\mu\alpha} \blacktriangleright Y) \qquad (2.37)$$

za sve $X, Y \in U(\mathfrak{g})$.

Dokaz Prvo ćemo indukcijom po stupnju monoma X pokazati da vrijedi formula (2.37) za djelovanje $T^{-1}_{\mu\nu}$ na umonžak dvaju monoma. Primjetimo da iz relacije (2.35) i normalizacijskog uvjeta slijedi da je

$$T^{-1}_{\mu\nu} \blacktriangleright X_\lambda = \delta_{\mu\nu} \blacktriangleright X_\lambda - C_{\mu\lambda\nu}. \tag{2.38}$$

Iz relacije (2.35) i identiteta (2.18) slijedi

$$\begin{aligned} T^{-1}_{\mu\nu} \blacktriangleright (X_\lambda Y) &= -\sum_{\alpha=1}^{n} C_{\alpha\lambda\nu}(T^{-1}_{\mu\alpha} \blacktriangleright Y) + X_\lambda(T^{-1}_{\mu\nu} \blacktriangleright Y) \\ &= \sum_{\alpha=1}^{n}(-C_{\alpha\lambda\nu} + \delta_{\nu\alpha}X_\lambda)(T^{-1}_{\mu\alpha} \blacktriangleright Y) \\ &= \sum_{\alpha=1}^{n}(T^{-1}_{\alpha\nu} \blacktriangleright X_\lambda)(T^{-1}_{\mu\alpha} \blacktriangleright Y). \end{aligned} \tag{2.39}$$

Ovim smo pokazali da relacija vrijedi za sve monome X_λ stupnja jedan. Kao korak indukcije pretpostavimo da (2.37) vrijedi za sve monome X stupnja k. Tada za monome stupnja $k+1$ imamo

$$\begin{aligned} T^{-1}_{\mu\nu} \blacktriangleright ((X_\lambda X)Y) &= \sum_{\alpha=1}^{n}(T^{-1}_{\alpha\nu} \blacktriangleright X_\lambda)(T^{-1}_{\mu\alpha} \blacktriangleright (XY)) \\ &= \sum_{\beta=1}^{n}(\sum_{\alpha=1}^{n}(T^{-1}_{\alpha\nu} \blacktriangleright X_\lambda)(T^{-1}_{\beta\alpha} \blacktriangleright X))(T^{-1}_{\mu\beta} \blacktriangleright Y) \\ &= \sum_{\beta=1}^{n}(T^{-1}_{\beta\nu} \blacktriangleright (X_\lambda X))(T^{-1}_{\mu\beta} \blacktriangleright Y). \end{aligned} \tag{2.40}$$

Stoga, dokazali smo da relacija (2.37) vrijedi za sve monome X iz $U(\mathfrak{g})$ te je linearno možemo proširiti na sve elemente iz $U(\mathfrak{g})$.

Sada ćemo pokazati da je djelovanje $\blacktriangleright$ dobro definirano. Ovdje ćemo pokazati da je djelovanje konzistentno s relacijom (2.1), a konzistentnost s relacijama (2.34) i (2.35) se pokazuje slično kao i u dokazu prethodnog teorema. Iz relacije (2.37) slijedi da je

$$T^{-1}_{\mu\nu} \blacktriangleright (X_\alpha X_\beta) = \delta_{\mu\nu}X_\alpha X_\beta - C_{\mu\beta\nu}X_\alpha - C_{\mu\alpha\nu}X_\beta + \sum_{\rho=1}^{n} C_{\mu\beta\rho}C_{\rho\alpha\nu}. \tag{2.41}$$

Prethodni izraz implicira da je

$$T_{\mu\nu}^{-1} \blacktriangleright [X_\alpha, X_\beta] = \delta_{\mu\nu}[X_\alpha, X_\beta] + \sum_{\rho=1}^{n}(C_{\mu\beta\rho}C_{\rho\alpha\nu} - C_{\mu\alpha\rho}C_{\rho\beta\nu}). \tag{2.42}$$

S druge strane, (2.38) implicira da je

$$T_{\mu\nu}^{-1} \blacktriangleright (\sum_{\rho=1}^{n} C_{\alpha\beta\rho}X_\rho) = \delta_{\mu\nu}[X_\alpha, X_\beta] + \sum_{\rho=1}^{n} C_{\alpha\beta\rho}C_{\rho\mu\nu}, \tag{2.43}$$

pa iz Jacobijevog identiteta (2.3) slijedi da je

$$\sum_{\rho=1}^{n}(C_{\mu\beta\rho}C_{\rho\alpha\nu} - C_{\mu\alpha\rho}C_{\rho\beta\nu}) = \sum_{\rho=1}^{n} C_{\alpha\beta\rho}C_{\rho\mu\nu}, \tag{2.44}$$

iz čega slijedi da je

$$T_{\mu\nu}^{-1} \blacktriangleright \Big([X_\alpha, X_\beta] - \sum_{\rho=1}^{n} C_{\alpha\beta\rho}X_\rho\Big) = 0. \tag{2.45}$$

$\blacksquare$

Polinome $T_{\mu\nu}^{-1} \blacktriangleright X$ sada možemo rekurzivno računati iz relacije (2.38) i

$$T_{\mu\nu}^{-1} \blacktriangleright (X_\alpha X) = X_\alpha(T_{\mu\nu}^{-1} \blacktriangleright X) - \sum_{\rho=1}^{n} C_{\rho\alpha\nu}(T_{\mu\rho}^{-1} \blacktriangleright X). \tag{2.46}$$

Sljedećim rezultatom ćemo pokazati da vrijedi $T_{\mu\alpha}^{-1} \blacktriangleright X = \tilde{p}_{\alpha\mu}(X)$.

Lema 2.2 *Neka je $X \in U(\mathfrak{g})$ monom. Ako generator X_μ pomaknemo na lijevu stranu u umnošku XX_μ, tada je*

$$XX_\mu = \sum_{\alpha=1}^{n} X_\alpha(T_{\mu\alpha}^{-1} \blacktriangleright X). \tag{2.47}$$

Dokaz Dokaz provodimo slično kao i u prethodnoj lemi, tj. tvrdnju ćemo dokazati indukcijom po stupnju monoma X. Za monome stupnja jedan iz relacije (2.38) slijedi da je

$$
\begin{aligned}
X_\nu X_\mu &= X_\mu X_\nu - \sum_{\alpha=1}^{n} C_{\mu\nu\alpha} X_\alpha \\
&= \sum_{\alpha=1}^{n} X_\alpha (\delta_{\alpha\mu} X_\nu - C_{\mu\nu\alpha}) = \sum_{\alpha=1}^{n} (T^{-1}_{\mu\alpha} \blacktriangleright X_\nu).
\end{aligned} \tag{2.48}
$$

Kao korak indukcije pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za sve monome X stupnja k. Sada iz (2.12) za monome stupnja $k+1$ slijedi

$$
\begin{aligned}
(XX_\nu)X_\mu &= \sum_{\alpha=1}^{n} XX_\alpha (T^{-1}_{\mu\alpha} \blacktriangleright X_\nu) \\
&= \sum_{\beta=1}^{n} X_\beta \sum_{\alpha=1}^{n} \Big((T^{-1}_{\alpha\beta} \blacktriangleright X)(T^{-1}_{\mu\alpha} \blacktriangleright X_\nu) \Big) \\
&= \sum_{\beta=1}^{n} X_\beta \Big(T^{-1}_{\mu\beta} \blacktriangleright (XX_\nu) \Big).
\end{aligned} \tag{2.49}
$$

Ovim smo pokazali da relacija (2.31) vrijedi za sve monome $X \in U(\mathfrak{g})$. ■

Prirodno je algebru $U(\mathfrak{g})$ proširiti s obje familije generatora $T_{\mu\nu}$ i $T^{-1}_{\mu\nu}$ na način da je njihovo djelovanje na $U(\mathfrak{g})$ dano jednadžbama (2.12) i (2.37). Ukoliko takvo proširenje postoji, tada direktno iz normalizacijskih uvjeta za $T_{\mu\nu}$ i $T^{-1}_{\mu\nu}$ slijedi da umnožak generatora mora zadovoljavati uvjet

$$
\sum_{\alpha=1}^{n} T^{-1}_{\mu\alpha} T_{\alpha\nu} = \sum_{\alpha=1}^{n} T_{\mu\alpha} T^{-1}_{\alpha\nu} = \delta_{\mu\nu} 1, \tag{2.50}
$$

što opravdava uvedenu oznaku $T^{-1}_{\mu\alpha}$.

Definicija 2.1 *Neka je H unitalna asocijativna algebra generirana skupom od $n+2n^2$ generatora $\{X_\mu, T_{\mu\nu}, T^{-1}_{\mu\nu} \mid 1 \le \mu\nu \le n\}$, koji zadovoljavaju relacije* (2.1), (2.7), (2.8), (2.34), (2.35) *i dodatni uvjet* (2.50).

Algebra H nasljeđuje djelovanje od $U(\mathfrak{g}^L)$ i $U(\mathfrak{g}^R)$ na podalgebru $U(\mathfrak{g})$ koje je dano sa (2.12) i (2.37). Lako se pokaže da su sve relacije konzistentne. Pokažimo za primjer da je navedeno djelovanje konzistentno s dodatnim uvjetom (2.50). Koristeći (2.12) i (2.37) imamo da za svaka dva monoma $X, Y \in U(\mathfrak{g})$ vrijedi

$$\begin{aligned}
\sum_{\rho=1}^{n}(T^{-1}_{\mu\rho}T_{\rho\nu}) \blacktriangleright (XY) &= \sum_{\rho=1}^{n} T^{-1}_{\mu\rho}(T_{\rho\nu}) \blacktriangleright (XY)) \\
&= \sum_{\alpha=1}^{n}\sum_{\rho=1}^{n} T^{-1}_{\mu\rho} \blacktriangleright (T_{\rho\alpha} \blacktriangleright X)(T_{\alpha\nu} \blacktriangleright Y) \\
&= \sum_{\alpha=1}^{n}\sum_{\beta=1}^{n}\sum_{\rho=1}^{n} \Big[T^{-1}_{\beta\rho} \blacktriangleright (T_{\rho\alpha} \blacktriangleright X)\Big]\Big[T^{-1}_{\mu\beta}(T_{\alpha\nu} \blacktriangleright Y)\Big] \\
&= \sum_{\alpha=1}^{n}\sum_{\beta=1}^{n}\sum_{\rho=1}^{n} \Big[(T^{-1}_{\beta\rho}T_{\rho\alpha}) \blacktriangleright X\Big]\Big[(T^{-1}_{\mu\beta}T_{\alpha}\nu) \blacktriangleright Y\Big] \\
&= \sum_{\alpha=1}^{n}\sum_{\beta=1}^{n}(\delta_{\beta\alpha}X)((T^{-1}_{\mu\beta}T_{\alpha\nu}) \blacktriangleright Y \\
&= X(\sum_{\alpha=1}^{n} T^{-1}_{\mu\alpha}T_{\alpha\nu}) \blacktriangleright Y = \delta_{\mu\nu}(XY).
\end{aligned} \tag{2.51}$$

Definirajmo sada elemente

$$Y_\mu = \sum_{\alpha=1}^{n} X_\alpha T^{-1}_{\mu\alpha} \in H, \quad 1 \le \mu \le n. \tag{2.52}$$

Iz (2.47) slijedi da je

$$Y_\mu \blacktriangleright X = \sum_{\alpha=1}^{n} X_\alpha(T^{-1}_{\mu\alpha} \blacktriangleright X) = XX_\mu, \ \forall X \in U(\mathfrak{g}). \tag{2.53}$$

Stoga, elementi X_μ i Y_μ djeluju kao operatori lijevog i desnog množenja na $U(\mathfrak{g})$ jer je

$$X_\mu \blacktriangleright X = X_\mu X, \tag{2.54}$$

$$Y_\mu \blacktriangleright X = XX_\mu, \quad \forall X \in U(\mathfrak{g}). \tag{2.55}$$

S obzirom da operatori lijevog i desnog množenja komutiraju, očekujemo da to vrijedi i za generatore X_μ i Y_μ.

Propozicija 2.1 *U algebri H vrijedi sljedeći identitet:*

$$[X_\mu, Y_\nu] = 0, \quad 1 \leq \mu, \nu \leq n. \tag{2.56}$$

Dokaz Iz relacija (2.1), (2.34) te koristeći Leibnizovo pravilo imamo da je

$$[X_\mu, Y_\nu] = \sum_{\alpha=1}^{n} \Big([X_\mu, X_\alpha] T^{-1}_{\nu\alpha} - X_\alpha [T^{-1}_{\nu\alpha}, X_\mu] \Big) \tag{2.57}$$

$$= \sum_{\alpha=1}^{n} \sum_{\beta=1}^{n} (C_{\mu\alpha\beta} X_\beta T^{-1}_{\nu\alpha} - C_{\mu\beta\alpha} X_\alpha T^{-1}_{\nu\beta} \Big) = 0. \tag{2.58}$$

■

Poglavlje 3

Realizacije Liejevih algebri i pridruženi zvijezda-umnošci

3.1 Uvod

Realizacije Liejevih algebri kao vektorskih polja na mnogostrukostima od velikog su interesa jer imaju široku primjenu u analizi diferencijalnih jednadžbi [24, 25] i klasifikaciji parcijalnih diferencijalnih jednadžbi [26]. Zasad je problem klasifikacije realizacija riješen samo za određene klase Liejevih algebri malih dimenzija. Nužan korak za proučavanje klasifikacije realizacija Liejevih algebri je proučavanje klasifikacija samih Liejevih algebri tj. klasifikacija svih mogućih komutacijskih relacija između elemenata baze. Najvažnije i najelegantnije rezultate vezane za realizacije Liejevih algebri dobio je S.Lie u radovima [27, 28]. Klasifikacija svih mogućih realizacija algebre $so(3)$ je dana u radovima [29, 30], a u radu [31] je konstruiran kompletan skup neekvivalentnih realizacija svih Liejevih algebri dimenzije ≤ 4. Mi ćemo u ovom radu koristiti metodu realizacija generatora Liejeve algebre preko komutativnih koordinata i pripadnih operatora derivacije. Takav tip realizacija konstruiran je koristeći Bargmanovu reprezentaciju te metode dobijene proučavanjem deformiranih oscilatora i oscilatorne algebre. Također, ovaj oblik realizacija je vrlo važan kao jedan od pristupa pri proučavanju nekomutativnih prostora tipa Lijeve algebre. U radu [17] dana je formula za reprezentaciju generatora konačnodimenzionalne Liejeve algebre u obliku formalnih redova potencija s koeficijentima u Weylovoj algebri. U spomenutom radu dobijena je realizacija izražena pomoću funkcije izvodnice za Bernoullijeve brojeve i ovisi samo o strukturnim konstantama Liejeve algebre $\mathfrak{g}$. Svakoj realizaciji Liejeve algebre odgovara uređenje na pripadnoj omotačkoj algebri. Realizacije u slučaju simetričnog i normalnog uređenja proučavane su u radovima [12, 17, 32]. Vrlo važan primjer nekomutativnog prostora je κ-deformirani prostor (o kojem ćemo više reći nešto kasnije) čije su realizacije proučavane u radovima [19, 18]. Beskonačna familija nekovarijantnih realizacija κ-deformiranog prostora je konstruirana u [19]. U radu [18] su proučavane kovarijantne realizacije κ-deformiranog prostora koje su kovarijantne s obzirom na djelovanje algebre rotacija $so(n)$. Tako dobijene realizacije su parametrizirane proizvoljnim analitičkim funkcijama, a za poseban izbor ovih funkcija dobiju se posebni tipovi realizacija: lijevo-kovarijantna, desno-kovarijantna i kanonska realizacija. U [10] su konstruirane realizacije Nappi-Witten tipa nekomutativnog prostora koji je dobijen ujedinjenjem κ-deformiranog prostora i θ- deformiranog prostora. Pokazano je da postoji beskonačna familija relazacija takvog prostora koje su parametrizirane s dvije funkcije te se za poseban izbor tih funkcija dobiju tri važne realizacije: desna, simetrična lijeva-desna i Weylova realizacija.

Svakoj realizaciji možemo pridružiti zvijezda-umnožak [10, 13, 19, 20, 21, 22]. Pojam zvijezda-umnoška vezan je uz problem kvantizacije kao jedan od pristupa u teoriji deformacijske kvantizacije [33, 20]. Objasnit ćemo ukratko motivaciju za definiranje pojma zvijezda-umnoška. U klasičoj mehanici skup svih stanja nekog sistema tvori Poissonovu mnogostrukost M, a klasične observable tvore komutativnu algebru glatkih funkcija $C^\infty(M)$. U kvantnoj mehanici sva moguća stanja tvore Hilbertov prostor H, a kvantne observable su nekomutativni hermitski operatori koji tvore C^*-algebru.

Stoga se postavlja pitanje na koji način možemo pridružiti klasičnim komutativnim observablama kvantne nekomutativne observable. Kao alternativni pristup ovom problemu, u radu [33] je predloženo da se komutativni umnošak na $C^\infty(M)$ deformira u nekomutativni asocijativni zvijezda-umnošak. Općenito u matematici, pod deformacijom nekog objekta podrazumijeva se familija objekata koji ovise o nekom parametru. Neka je X objekt u kategoriji C. Deformacija od X je familija objekata $X_\varepsilon \in Obj(C)$ koja ovisi o parametru ε tako da je $X = X_{\varepsilon_0}$ za određeni ε_0. Stoga, ideja je definirati familiju asocijativnih umnožaka na $C^\infty(M)$ koji glatko ovise o parametru $h \in \mathbb{R}$, tako da u slučaju kad je $h = 0$ dobijemo komutativni umnošak. Egzistenciju zvijezda-umnoška na simplektičkom faznom prostoru su prvo pokazali DeWilde i Lecomte [34] 1983. Konstrukciju zvijezda-umnoška za opću Poissonovu mnogostrukost dao je Kontsevich 1997. u [35]. Mi ćemo ovdje navesti definiciju danu u radu [20].

Definicija 3.1 *Zvijezda umnošak na Poissonovoj mnogostrukosti* $(M, \{\cdot,\cdot\})$ *je asocijativni* $\mathbb{C}[[h]]$*-bilinearni umnošak* $*\colon C^\infty(M)[[h]] \times C^\infty(M)[[h]] \to C^\infty(M)[[h]]$ *dan sa*

$$f * g = \sum_{n=0}^{\infty} B_n(f,g)h^n, \ \forall f, g \in C^\infty(M) \tag{3.1}$$

tako da vrijedi

1. $f * g \mid_{h=0} = fg$,
2. $f * g - g * f = ih\{f,g\} + \cdots$ *(potencije višeg reda od* h*)*,
3. $f * 1 = f = 1 * f$,
4. B_n *je bidiferencijalni operator,*

gdje je $\{\cdot,\cdot\}$ *Poissonova zagrada na* M.

Primjer 3.1 *(**Moyalov zvijezda-umnožak**)*

Na prostoru $C^\infty(\mathbb{R}^{2n})$ Poissonova zagrada je definirana sa

$$\{f,g\} = \sum_{i=1}^{2n}\sum_{j=1}^{2n}\{x_i,x_j\}\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial g}{\partial x_j}. \tag{3.2}$$

Ako je $\{x_i,x_j\} = const.$, tj. $\{x_i,x_j\} = \alpha_{ij},\ \alpha_{ij} = -\alpha_{ji} \in \mathbb{R}$, tada Poissonovu zagradu možemo zapisati kao

$$\{f,g\} = \sum_{i=1}^{2n}\sum_{j=1}^{2n}\alpha_{ij}\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial g}{\partial x_j}. \tag{3.3}$$

U slučaju konstantne Poissonove zagrade (3.3) *Moyalov zvijezda-umnožak definiramo sa*

$$f * g = \mu \circ exp\Big(\frac{h}{2}\sum_{i,j}\alpha_{ij}\partial_i \otimes \partial_j\Big)(f \otimes g), \tag{3.4}$$

gdje je $\mu(f\otimes g) = f\cdot g$, a

$$exp\Big(\frac{h}{2}\sum_{i,j}\alpha_{ij}(\partial_i \otimes \partial_j)\Big) = I + \frac{h}{2}\sum_{i,j}\alpha_{ij}\partial_i \otimes \partial_j + O(h^2). \tag{3.5}$$

Stoga je

$$\begin{aligned} f * g &= \mu\Big(f\otimes g + \sum_{i,j}\alpha_{ij}\Big(\frac{\partial f}{\partial x_i}\otimes\frac{\partial f}{\partial x_i}\Big) + O(h^2)\Big) \\ &= f\cdot g + \frac{h}{2}\{f,g\} + O(h^2). \end{aligned}$$

Matematička struktura deformiranih algebri se osim u kvantizaciji proučava u raznim kontekstima matematičke fizike. Mi ćemo u ovom radu proučavati zvijezda-umnožak induciran realizacijom Liejeve algebre te ćemo uvesti pojam lijevo-desne dualnosti zvijezda-umnoška. Zvijezda-umnošci vezani za realizacje Liejevih algebri proučavani su u [10]. Ovakav zvijezda-umnožak se može poopćiti i na diferencijalne forme što je opisano u radu [13].

3.2 Realizacije Liejevih algebri

U ovom poglavlju proučavamo realizacije nekomutativnih prostora tipa Liejeve algebre. Neka je $\mathfrak{g}_h$ Liejeva algebra definirana relacijama

$$[X_\mu, X_\nu] = \sum_{\alpha=1}^{n} C_{\mu\nu\alpha}(h) X_\alpha, \quad \mu, \nu = 1, 2, \ldots, n, \tag{3.6}$$

gdje strukturne konstante $C_{\mu\nu\alpha}(h)$ ovise o deformacijskom parametru $h \in \mathbb{R}$ tako da je $\lim_{h\to 0} C_{\mu\nu\alpha}(h) = 0$. Svaku Liejevu algebru $\mathfrak{g}$ definiranu strukturnim konstantama $C_{\mu\nu\alpha}$ možemo deformirati na ovaj način skaliranjem strukturnih konstanti $C_{\mu\nu\alpha} \to hC_{\mu\nu\alpha}$. Prisjetimo se da je n-ta Weylova algebra A_n asocijativna algebra nad poljem $\mathbb{K}$ generirana elementima $x_1, \ldots, x_n, \partial_1, \ldots \partial_n$ koji zadovoljavaju komutacijske relacije

$$[x_\mu, x_\nu] = [\partial_\mu, \partial_\nu] = 0, \quad [\partial_\mu, \partial_\nu] = \delta_{\mu\nu}. \tag{3.7}$$

Algebra A_n ima vjernu reprezentaciju na vektorski prostor polinoma $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ gdje x_μ predstavlja operator množenja sa x_μ, a ∂_μ predstavlja parcijalnu derivaciju $\frac{\partial}{\partial x_\mu}$. Neka je sa $\hat{A}_n$ označeno upotpunjenje Weylove algebre A_n s obzirom na stupanj diferencijalnog operatora. Primjetimo da tada $\hat{A}_n$ sadrži formalne redove potencija u ∂_μ, ali samo polinome u x_μ. Stupanj diferencijalnog operatora $\partial^\nu = \partial_1^{\nu_1} \cdots \partial_n^{\nu_n}$ definiramo sa $|\nu| = \nu_1 + \cdots \nu_n$. Neka je $f = \sum_{|\nu|\geq 0} p_\nu(x_1, \ldots, x_n)\partial^\nu \in \hat{A}_n$ formalni red, gdje sumacija ide po multiindeksu $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_n)$. Tada sa $l(f)$ definiramo najmanju duljinu multiiindeksa $|\nu| \in \mathbb{N}$ takvu da je $p_\nu(x_1, \ldots, x_n) \neq 0$, a za $f = 0$ definiramo da je $l(0) = +\infty$. Neka su $f = \sum_{|\nu|\geq 0} p_\nu(x_1, \ldots, x_n)\partial^\nu$ i $g = \sum_{|\mu|\geq 0} q_\mu(x_1, \ldots, x_n)\partial^\mu$ dva različita formalna reda iz $\hat{A}_n$. Metriku na $\hat{A}_n$ definiramo sa

$$d(f, g) = 2^{-n(f-g)}, \tag{3.8}$$

a topologija na $\hat{A}_n$ je inducirana tako definiranom metrikom.

Definicija 3.2 *Realizacija Lijeve algebre* (3.6) *je monomorfizam Liejevih algebri* $\varphi\colon \mathfrak{g}_h \to \hat{A}_n$ *oblika*

$$\varphi(X_\mu) = \sum_{\alpha=1}^{n} x_\alpha \varphi_{\alpha\mu}(\partial), \tag{3.9}$$

gdje je $\varphi_{\alpha\mu}(\partial)$ *formalni red potencija u operatorima* $\partial_1, \dots \partial_n$ *takav da je* $\lim_{h\to 0} \varphi_{\alpha\mu}(\partial) = \delta_{\alpha\mu}$.

Prema univerzalnom svojstvu omotačke algebre, Liejev morfizam φ ima jedinstveno proširenje na homomorfizam algebri $\bar{\varphi}\colon U(\mathfrak{g}_h) \to \hat{A}_n$ takav da je $\bar{\varphi}(\sigma(X)) = \varphi(X)$ za $\forall X \in \mathfrak{g}_h$, gdje je $\sigma\colon \mathfrak{g} \to U(\mathfrak{g})$ kanonski morfizam. Radi jednostavnosti ćemo identificirati morfizam $\bar{\varphi}$ sa φ te X_μ s njegovom kanonskom slikom $\sigma(X_\mu) \in U(\mathfrak{g})$. Za realizaciju od X_μ uvest ćemo oznaku $\hat{x}_\mu = \varphi(X_\mu)$. Tada

$$\hat{x}_\mu = \sum_{\alpha=1}^{n} x_\alpha \varphi_{\alpha\mu}(\partial) \tag{3.10}$$

možemo promatrati kao deformaciju komutativne koordinate x_μ jer je $\lim_{h\to 0} \hat{x}_\mu = x_\mu$. S obzirom da je φ Liejev morfizam, vrijedi

$$[\hat{x}_\mu, \hat{x}_\nu] = \sum_{\alpha=1}^{n} C_{\mu\nu\alpha} \hat{x}_\alpha, \tag{3.11}$$

iz čega slijedi da je $U(\mathfrak{g}_h)$ izomorfna s algebrom $\hat{X} \subset \hat{A}_n$ generiranom elementima $\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_n$. Simetrična algebra $S(\mathfrak{g}_h)$ trivijalno je izomorfna sa podalgebrom $X \subset \hat{A}_n$ generiranom komutativnim koordinatama $x_1, \dots, x_n$. Sljedeća propozicija nam daje vezu između relacije (3.11) i izbora funkcije $\varphi_{\alpha\mu}(\partial)$.

Propozicija 3.1 *Generatori* $\hat{x}_\mu = \sum_{\alpha=1}^{n} x_\alpha \varphi_{\alpha\mu}(\partial)$, $1 \le \mu \le n$, *zadovoljavaju relaciju* (3.11) *ako i samo ako su funkcije* $\varphi_{\alpha\mu}(\partial)$ *rješenja sljedećeg formalnog sustava parcijalnih diferencijalnih jednadžbi:*

$$\sum_{\alpha=1}^{n} \left(\frac{\partial \varphi_{\lambda\mu}}{\partial \partial_\alpha} \varphi_{\alpha\nu} - \frac{\partial \varphi_{\lambda\nu}}{\partial \partial_\alpha} \varphi_{\alpha\mu} \right) = \sum_{\alpha=1}^{n} C_{\mu\nu\alpha} \varphi_{\lambda\alpha}, \quad \lambda, \mu, \nu = 1, 2, \dots, n. \tag{3.12}$$

Dokaz

Koristeći realizaciju (3.10) dobivamo

$$[\hat{x}_\mu, \hat{x}_\nu] = \sum_{\alpha=1}^{n}\sum_{\beta=1}^{n}[x_\alpha\varphi_{\alpha\mu}, x_\beta\varphi_{\beta\nu}] \tag{3.13}$$

$$= \sum_{\alpha=1}^{n}\sum_{\beta=1}^{n}(x_\alpha[\varphi_{\alpha\mu}, x_\beta]\varphi_{\beta\nu} + x_\beta[x_\alpha, \varphi_{\beta\nu}]\varphi_{\alpha\nu}). \tag{3.14}$$

U Weylovoj algebri vrijedi formalna relacija

$$[f(\partial), x_\alpha] = \frac{\partial f}{\partial\partial_\alpha},\ \forall f(\partial) \in A_n, \tag{3.15}$$

gdje je $f(\partial)$ monom u $\partial_1, \dots \partial_n$ te se (3.15) može jednostavno proširi na formalne redove potencija u ∂_μ. Stoga, vrijedi da je

$$[\hat{x}_\mu, \hat{x}_\nu] = \sum_{\alpha=1}^{n}\sum_{\beta=1}^{n}\Big(x_\alpha\frac{\partial\varphi_{\alpha\mu}}{\partial\partial_\beta}\varphi_{\beta\nu} - x_\beta\frac{\partial\varphi_{\beta\nu}}{\partial\partial_\alpha}\varphi_{\alpha\mu}\Big). \tag{3.16}$$

Koristeći prethodni izraz imamo da (3.10) vrijedi ako i samo ako je

$$\sum_{\lambda=1}^{n} x_\lambda\Big(\sum_{\alpha=1}^{n}\Big(\frac{\partial\varphi_{\lambda\mu}}{\partial\partial_\alpha}\varphi_{\alpha\nu} - \frac{\partial\varphi_{\lambda\nu}}{\partial\partial_\alpha}\varphi_{\alpha\mu}\Big)\Big) = \sum_{\lambda=1}^{n} x_\lambda\Big(\sum_{\alpha=1}^{n} C_{\mu\nu\alpha}\varphi_{\lambda\alpha}\Big). \tag{3.17}$$

S obzirom da izrazi koji sadrže funkcije $\varphi_{\mu\nu}$ ovise samo o diferencijalnim operatorima ∂_μ, relacija (3.17) vrijedi ako i samo ako je

$$\sum_{\alpha=1}^{n}\Big(\frac{\partial\varphi_{\lambda\mu}}{\partial\partial_\alpha}\varphi_{\alpha\nu} - \frac{\partial\varphi_{\lambda\nu}}{\partial\partial_\alpha}\varphi_{\alpha\mu}\Big) = \sum_{\alpha=1}^{n} C_{\mu\nu\alpha}\varphi_{\lambda\alpha}. \tag{3.18}$$

■

Za danu Liejevu algebru $\mathfrak{g}$ sustav (3.12) općenito ima beskonačno mnogo rješenja koja su parametrizirana proizvoljnim realnim analitičkim funkcijama.

Neka je H_φ podalgebra od $\hat{A}_n$ generirana sa $\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_n$ i $\partial_1, \dots, \partial_n$. H_φ možemo interpretirati kao fazni prostor od $U(\mathfrak{g}_h) \cong \hat{X}$ koji je dobijen proširenjem nekomutativnog prostora $\hat{X}$ operatorima momenta ∂_μ. Za danu realizaciju $\hat{x}_\mu = \sum_{\alpha=1}^{n} x_\alpha\varphi_{\alpha\mu}(\partial)$, generatori od H_φ zadovoljavaju relacije (3.11) i relacije

$$[\partial_\mu, \partial_\nu] = 0, \quad [\partial_\mu, \hat{x}_\nu] = \varphi_{\mu\nu}(\partial). \tag{3.19}$$

H_φ možemo sada promatrati kao deformaciju Weylove algebre jer u limesu kad $h \to 0$ relacije (3.11) i (3.19) prelaze u standardne relacije (3.7) koje definiraju A_n. Primjetimo da deformacija od A_n nije jedinstvena jer ovisi o danoj realizaciji φ.

3.2.1 Zvijezda-umnožak pridružen realizacijama

Realizacije Liejevih algebri usko su vezane uz pojmove uređenja na omotačkoj algebri $U(\mathfrak{g}_h)$ i zvijezda-umnoška na simetričnoj algebri $S(\mathfrak{g}_h) \cong X$. U ovom ćemo poglavlju opisati vezu između realizacije Liejeve algebre $\mathfrak{g}_h$ i zvijezda-umnoška na X. Da bismo to pokazali uvest ćemo pojam djelovanja $\triangleright\colon A_n \otimes X \to X$, $a \otimes f \to a \triangleright f$, definiranog sa

1. $x_\mu \triangleright f = x_\mu f$,
2. $\partial_\mu \triangleright f = \frac{\partial f}{\partial x_\mu}$,
3. $(ab) \triangleright f = a \triangleright (b \triangleright f), \quad \forall f \in X$.

Ovako definirano djelovanjemo možemo linearno proširiti na sve formalne redove potencija u $\hat{A}_n$.

Za danu realizaciju $\varphi\colon \mathfrak{g}_h \to A_n$, definirajmo linearno preslikavanje

$$\Omega_\varphi\colon \hat{X} \to X, \quad \Omega_\varphi(\hat{f}) = \hat{f} \triangleright 1. \tag{3.20}$$

S obzirom da je svaka realizacija oblika $\hat{x}_\mu = x_\mu + O(x, \partial)$, slijedi da će Ω_φ svakom monomu $\hat{f}$ stupnja $k \geq 1$ pridružiti polinom $\Omega_\varphi(\hat{f})$ stupnja k. Očito za svaku realizaciju φ vrijedi

$$\Omega_\varphi(\hat{x}_\mu) = x_\mu \quad \text{i} \quad \Omega_\varphi(1) = 1. \tag{3.21}$$

Za monome višeg reda $\hat{f} = \hat{x}_{\mu_1}\hat{x}_{\mu_2}\dots\hat{x}_{\mu_k}$ vrijedi

$$\Omega_\varphi(\hat{f}) = x_{\mu_1}x_{\mu_2}\dots x_{\mu_n} + p_{k-1}, \tag{3.22}$$

gdje je p_{k-1} polinom stupnja $k-1$ u varijablama $x_{\mu_1}, x_{\mu_2}, \dots, x_{\mu_k}$, čiji egzaktni oblik ovisi o realizaciji φ.

Lema 3.1 *Neka je* $\varphi\colon \mathfrak{g}_h \to \hat{A}_n$ *realizacija Liejeve algebre* (3.11)*. Tada je* $\Omega_\varphi\colon \hat{X} \to X$ *izomorfizam vektorskih prostora.*

Dokaz

Neka je X_k prostor svih monoma u $x_1, \dots, x_n$ stupnja $\leq k$ i neka je $X_0 = \mathbb{K}$. Nadalje, neka je $\hat{X}_k$ prostor svih monoma u $\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_n$ stupnja $\leq k$ i neka je $\hat{X}_0 = \mathbb{K}$. Tada imamo sljedeće filtracije vektorskih prostora:

$$X_0 \subset X_1 \subset X_2 \dots X, \quad X = \cup_{k=1}^{\infty} X_k, \tag{3.23}$$

$$\hat{X}_0 \subset \hat{X}_1 \subset \hat{X}_2 \dots \hat{X}, \quad \hat{X} = \cup_{k=1}^{\infty} \hat{X}_k. \tag{3.24}$$

Da bi dokazali tvrdnju dovoljno je pokazati da je $\Omega_\varphi\colon X_k \mid_{\hat{X}_k} \to X_k$ izomorfizam za svaki k. Dokaz provodimo indukcijom po k. Za slučaj kada je $k = 1$, dokaz je trivijalan jer je $\Omega_\varphi(\hat{x}_\mu) = x_\mu$. Pretpostavimo sada da tvrdnja vrijedi za neki $k > 1$. Iz relacije (3.22) slijedi da za svaki monom $x_{\mu_1}\dots x_{\mu_{k+1}} \in X_{k+1}$ vrijedi

$$\Omega_\varphi(\hat{x}_{\mu_1}\cdots\hat{x}_{\mu_{k+1}}) = x_{\mu_1}x_{\mu_2}, \dots x_{\mu_{k+1}} + p_k \tag{3.25}$$

za neki polinom $p_k \in X_k$.

Prema pretpostavci indukcije postoji jedinstveni $\hat{p}_k \in \hat{X}_k$ takav da vrijedi

$$\Omega_\varphi(\hat{p}_k(\hat{x}_{\mu_1}\hat{x}_{\mu_2}\dots\hat{x}_{\mu_{k+1}})) = p_k(x_{\mu_1}, x_{\mu_2}, \dots, x_{\mu_{k+1}}). \tag{3.26}$$

Prethodna relacija implicira da je

$$\Omega_\varphi(\hat{x}_{\mu_1}\hat{x}_{\mu_2}\dots\hat{x}_{\mu_{k+1}} - \hat{p}_k) = x_{\mu_1}x_{\mu_2}, \dots x_{\mu_{k+1}}, \tag{3.27}$$

iz čega slijedi da je $\Omega_\varphi \mid_{\hat{X}_{k+1}}$ surjekcija. Iz Poincaré-Birkhoff-Wittovog teorema slijedi da baza za $\hat{X}_{k+1}$ sadrži sve monome oblika $\hat{x}_{\mu_1}^{\alpha_1}\hat{x}_{\mu_2}^{\alpha_2}\cdots\hat{x}_{\mu_n}^{\alpha_n}$ takve da je $|\alpha| \leq k+1$. Iz prethodnog slijedi da je $dim(\hat{X}_{k+1}) = dim(X_{k+1})$. Sada po teoremu o rangu i defektu imamo da je $\Omega_\varphi \mid_{\hat{X}_k}$ injekcija iz čega zaključujemo da je $\Omega_\varphi \mid_{\hat{X}_{k+1}} \to X_{k+1}$ izomorfizam vektorskih prostora.

■

Prethodni rezultat osigurava egzistenciju inverznog preslikavanja $\Omega_\varphi^{-1}\colon X \to \hat{X}$ pomoću kojeg ćemo definirati nekomutativni zvijezda-umnožak na X tako da vektorski prostori X i $\hat{X}$ budu izomorfni i kao algebre.

Definicija 3.3 *Zvijezda-umnožak* $*\colon X\otimes X \to X$ *induciran realizacijom* $\varphi\colon \mathfrak{g}_h \to \hat{A}_n$ *definiramo sa*

$$f * g = \Omega_\varphi(\Omega_\varphi^{-1}(f)\Omega_\varphi^{-1}(g)), \quad \forall f, g \in X. \tag{3.28}$$

Zvijezda-umnožak je deformacija komutativnog umnoška na X jer vrijedi

$$\lim_{h\to 0}(f * g) = fg. \tag{3.29}$$

Propozicija 3.2 $(X, +, *)$ *je unitalna asocijativna algebra.*

Dokaz

Za svaki $f \in X$ imamo da vrijedi

$$f * 1 = \Omega_\varphi(\Omega_\varphi^{-1}(f)\Omega_\varphi^{-1}(1)) = \Omega_\varphi(\Omega_\varphi^{-1}(f)1) = f. \tag{3.30}$$

Slično se pokaže da vrijedi $1 * f = f$. Neka su sada $f, g, h \in X$. Iz definicije zvijezda-umnoška i asocijativnosti množenja na $\hat{X}$ slijedi da je

$$\begin{aligned}(f * g) * h &= \Omega_\varphi[\Omega_\varphi^{-1}(f * g)\Omega_\varphi^{-1}(h)]\\ &= \Omega_\varphi[\Omega_\varphi^{-1}(f)(\Omega_\varphi^{-1}(g)\Omega_\varphi^{-1}(h))]\\ &= \Omega_\varphi[\Omega_\varphi^{-1}(f)\Omega_\varphi^{-1}(g * h)] = f * (g * h).\end{aligned} \tag{3.31}$$

■

Ako označimo sa $\hat{f} = \Omega_\varphi^{-1}(f)$ i $\hat{g} = \Omega_\varphi^{-1}(g)$, tada zvijezda-umnožak možemo ekvivalentno zapisati kao

$$f * g = (\hat{f}\hat{g}) \triangleright 1 = \hat{f} \triangleright g. \tag{3.32}$$

Označimo sa X^* asocijativnu algebru X sa zvijezda umnoškom. Iz definicije (3.28) proizlazi da je

$$\Omega_\varphi(\hat{f}\hat{g}) = \Omega_\varphi(\hat{f}) * \Omega_\varphi(\hat{g}), \quad \forall \hat{f}, \hat{g} \in \hat{X}, \tag{3.33}$$

što pokazuje da je $\Omega_\varphi \colon \hat{X} \to X^*$ izomorfizam algebri. Iz komutacijskih relacija (3.11) i (3.33) slijedi

$$x_\mu * x_\nu - x_\nu * x_\mu = \sum_{\alpha=1}^{n} C_{\mu\nu\alpha} x_\alpha. \tag{3.34}$$

Stoga je struktura algebre X^* određena relacijama

$$[x_\mu, x_\nu]_* = \sum_{\alpha=1}^{n} C_{\mu\nu\alpha} x_\alpha, \tag{3.35}$$

gdje je $[x_\mu, x_\nu]_* = x_\mu * x_\nu - x_\nu * x_\mu$ zvijezda-komutator.

3.2.2 Lijevo-desna dulnost zvijezda-umnoška

U ovom ćemo dijelu uvesti pojam lijevo-desne dualnosti zvijezda umnoška. Neka su $\mathfrak{g}_h$ i $\tilde{\mathfrak{g}}_h$ Liejeve algebre iste dimenzije definirane komutacijskim relacijama:

$$\mathfrak{g}_h : \quad [X_\mu, X_\nu] = \sum_{\alpha=1}^{n} C_{\mu\nu\alpha} X_\alpha, \tag{3.36}$$

$$\tilde{\mathfrak{g}}_h : \quad [Y_\mu, Y_\nu] = \sum_{\alpha=1}^{n} \tilde{C}_{\mu\nu\alpha} Y_\alpha. \tag{3.37}$$

Neka su $\varphi\colon \mathfrak{g}_h \to \hat{A}_n$ i $\tilde{\varphi}\colon \tilde{\mathfrak{g}}_h \to \hat{A}_n$ realizacije od $\mathfrak{g}_h$ i $\tilde{\mathfrak{g}}_h$ dane sa

$$\varphi(X_\mu) = \hat{x}_\mu = \sum_{\alpha=1}^{n} x_\alpha \varphi_{\alpha\mu}(\partial), \tag{3.38}$$

$$\tilde{\varphi}(Y_\mu) = \hat{y}_\mu = \sum_{\alpha=1}^{n} x_\alpha \tilde{\varphi}_{\alpha\mu}(\partial). \tag{3.39}$$

Označimo sa $*$ i $\tilde{*}$ zvijezda umnoške inducirane realizacijama φ i $\tilde{\varphi}$.

Definicija 3.4 *Kažemo da su zvijezda umnošci $*$ i $\tilde{*}$ u lijevo-desnoj dualnosti ako vrijedi*

$$f * g = g \tilde{*} f, \quad \forall f, g \in X. \tag{3.40}$$

U ovom slučaju kažemo da su φ i $\tilde{\varphi}$ dualne realizacije.

Ukoliko su φ i $\tilde{\varphi}$ dualne realizacije, tada postoji veza između algebri $\mathfrak{g}_h$ i $\tilde{\mathfrak{g}}_h$. Iz (3.35) imamo da vrijedi

$$x_\mu * x_\nu - x_\nu * x_\mu = \sum_{\alpha=1}^{n} C_{\mu\nu\alpha} x_\alpha, \tag{3.41}$$

$$x_\mu \tilde{*} x_\nu - x_\nu \tilde{*} x_\mu = \sum_{\alpha=1}^{n} \tilde{C}_{\mu\nu\alpha} x_\alpha. \tag{3.42}$$

Iz uvjeta dualnosti $x_\mu * x_\nu = x_\nu \tilde{*} x_\mu$ i iz (3.41) i (3.42) slijedi da je

$$\tilde{C}_{\mu\nu\alpha} = -C_{\mu\nu\alpha}. \tag{3.43}$$

Stoga je Liejeva zagrada za $\tilde{\mathfrak{g}}_h$ dana sa

$$[Y_\mu, Y_\nu] = -\sum_{\alpha=1}^{n} C_{\mu\nu\alpha} Y_\alpha, \tag{3.44}$$

pa su $\mathfrak{g}_h$ i $\tilde{\mathfrak{g}}_h$ izomorfne sa izomorfizmom $X_\mu \to -Y_\mu$.

Sljedeći rezultat nam daje karakterizaciju dualnih realizacija.

Propozicija 3.3 *Neka su* φ *i* $\tilde{\varphi}$ *realizacije Liejevih algebri* (3.6) *i* (3.44) *dane sa*

$$\varphi(X_\mu) = \hat{x}_\mu = \sum_{\alpha=1}^{n} x_\alpha \varphi_{\alpha\mu}(\partial), \quad \tilde{\varphi}(Y_\mu) = \hat{y}_\mu = \sum_{\alpha=1}^{n} x_\alpha \tilde{\varphi}_{\alpha\mu}. \tag{3.45}$$

Tada su inducirani zvijezda-umnošci $*$ *i* $\tilde{*}$ *u lijevo-desnoj dualnosti ako i samo ako je* $[\hat{x}_\mu, \hat{y}_\nu] = 0,\ \forall \mu, \nu = 1, \dots, n.$

Dokaz

Pretpostavimo prvo da su $*$ i $\tilde{*}$ u lijevo-desnoj dualnosti. Iz definicije izomorfizma $\Omega_\varphi \colon \hat{X} \to X$ proizlazi da je $\Omega_\varphi^{-1}(x_\mu) = \hat{x}_\mu$ i $\Omega_{\tilde{\varphi}}^{-1}(y_\mu) = \hat{y}_\mu$. Sada za svaki $f \in X$ slijedi da je

$$x_\mu * f = \Omega_\varphi(\Omega_\varphi^{-1}(x_\mu)\Omega_\varphi^{-1}(f)) = (\hat{x}_\mu \Omega_\varphi^{-1}(f)) \triangleright 1 \tag{3.46}$$

$$= \hat{x}_\mu \triangleright (\Omega_\varphi^{-1}(f) \triangleright 1) = \hat{x}_\mu \triangleright f. \tag{3.47}$$

Slično pokažemo i da je $x_\mu \tilde{*} f = \hat{y}_\mu \triangleright f$. Prethodno nam implicira da je

$$\begin{aligned}
[\hat{x}_\mu, \hat{y}_\nu] \triangleright f &= (\hat{x}_\mu \hat{y}_\nu) \triangleright f - (\hat{y}_\mu \hat{x}_\nu) \triangleright f \\
&= \hat{x}_\mu \triangleright (x_\nu \tilde{*} f) - \hat{y}_\nu \triangleright (x_\mu * f) \\
&= x_\mu * (x_\nu \tilde{*} f) - x_\nu \tilde{*} (x_\mu * f) \\
&= x_\mu * (f * x_\nu) - (x_\mu * f) * x_\nu = 0,
\end{aligned} \tag{3.48}$$

gdje smo u zadnjoj jednadžbi iskoristili svojstvo dualnosti $f * g = g \tilde{*} f$ i asocijativnost zvijezda-umnoška. Komutator za $\hat{x}_\mu$ i $\hat{y}_\nu$ je oblika $\sum_{\alpha=1}^{n} x_\alpha k_\alpha(\partial)$ za neki formalni red potencija $k_\alpha(\partial) \in \hat{A}_n$. Stoga,

$$[\hat{x}_\mu, \hat{y}_\nu] \triangleright f = \sum_{\alpha=1}^{n} x_\alpha k_\alpha(\partial) \triangleright f = 0,\ \forall f \in X \tag{3.49}$$

implicira da vrijedi $[\hat{x}_\mu, \hat{y}_\nu] = 0$.

Pretpostavimo sada da vrijedi $[\hat{x}_\mu, \hat{y}_\nu] = 0\ \forall \mu, \nu = 1, \dots, n$. Koristeći (3.32) imamo da je $f * g = \Omega_\varphi^{-1}(f) \triangleright g$ i $g \tilde{*} f = \Omega_{\tilde{\varphi}}^{-1}(g) \triangleright f$. S obzirom da je $\Omega_\varphi^{-1}(f)$

polinom u $\hat{x}_\mu$ i $\Omega_{\tilde{\varphi}}^{-1}(g)$ polinom u $\hat{y}_\mu$, tada pretpostavka $[\hat{x}_\mu, \hat{y}_\nu] = 0$ implicira da polinomi $\Omega_\varphi^{-1}(f)$ i $\Omega_{\tilde{\varphi}}^{-1}(g)$ komutiraju. Sada imamo da je

$$\begin{aligned} 0 &= [\Omega_\varphi^{-1}(f), \Omega_{\tilde{\varphi}}^{-1}(g)] \triangleright 1 \\ &= \Omega_\varphi^{-1}(f) \triangleright (\Omega_{\tilde{\varphi}}^{-1}(g) \triangleright 1) - \Omega_{\tilde{\varphi}}^{-1}(g) \triangleright (\Omega_\varphi^{-1}(f) \triangleright 1) \\ &= \Omega_\varphi^{-1}(f) \triangleright g - \Omega_{\tilde{\varphi}}^{-1}(g) \triangleright f = f * g - g \tilde{*} f. \end{aligned}$$

Stoga, $f * g = g \tilde{*} f$, $\forall f, g \in X$, tj. $*$ i $\tilde{*}$ su u lijevo-desnoj dualnosti. ■

3.3 Simetrične realizacije Liejevih algebri

Realizacije Liejevih algebri su usko vezane uz pojam uređenja na omotačkoj algebri. Pokazali smo da je $\Omega_\varphi \colon \hat{X} \to X$ izomorfizam vektorskih prostora pa s obzirom da monomi

$$x_{\mu_1} x_{\mu_2} \dots x_{\mu_k}, \quad \mu_1 \leq \mu_2 \leq \dots \leq \mu_k, \quad k \geq 1 \tag{3.50}$$

tvore bazu za X, onda monomi

$$\Omega_\varphi^{-1}(x_{\mu_1} x_{\mu_2} \dots x_{\mu_k}), \quad \mu_1 \leq \mu_2 \leq \dots \leq \mu_k, \quad k \geq 1 \tag{3.51}$$

tvore bazu za $\hat{X}$. Očito je da će monomi $\Omega_\varphi^{-1}(x_{\mu_1} x_{\mu_2} \dots x_{\mu_k})$ ovisiti o realizaciji φ pa će različite realizacije inducirati različite baze na $\hat{X}$. Mi ćemo u ovom dijelu proučavati realizacije koje induciraju simetrično uređene na $\hat{X}$.

Definicija 3.5 *Neka je $S(V)$ simetrična algebra nad vektorskim prostorom V i neka je A asocijativna algebra, obje nad poljem $\mathbb{K}$. Kažemo da je linearno preslikavanje $f \colon S(V) \to A$ simetrizacija ako vrijedi*

$$f(x_{\mu_1} x_{\mu_2} \dots x_{\mu_n}) = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} f(x_{\mu_{\sigma(1)}}) f(x_{\mu_{\sigma(2)}}) \dots f(x_{\mu_{\sigma(n)}}), \quad n \geq 1, \tag{3.52}$$

za sve $x_{\mu_1}, x_{\mu_2}, \dots, x_{\mu_n} \in V$.

Općenito, linearno preslikavanje $f\colon S(V) \to A$ je simetrizacija ako i samo ako

$$f(x^n) = (f(x))^n, \quad \forall x \in V,\ n \geq 1. \tag{3.53}$$

Pretpostavimo sada da $\Omega_\varphi\colon \hat{X} \to X$ zadovoljava svojstvo

$$\Omega_\varphi\Big(\frac{1}{k!}\sum_{\sigma\in S_k} \hat{x}_{\mu_{\sigma(1)}}\hat{x}_{\mu_{\sigma(2)}}\dots\hat{x}_{\mu_{\sigma(k)}}\Big) = x_{\mu_1}x_{\mu_2}\dots x_{\mu_k}, \quad k \geq 0, \tag{3.54}$$

za sve generatore $\hat{x}_{\mu_1}, \hat{x}_{\mu_2}, \dots, \hat{x}_{\mu_k} \in \{\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_n\}$. Tada zbog $\Omega_\varphi^{-1}(x_\mu) = \hat{x}_\mu$ slijedi da je

$$\Omega_\varphi^{-1}(x_{\mu_1}x_{\mu_2}\dots x_{\mu_k}) = \frac{1}{k!}\sum_{\sigma\in S_k}\Omega_\varphi^{-1}(x_{\mu_{\sigma(1)}})\Omega_\varphi^{-1}(x_{\mu_{\sigma(2)}})\dots\Omega_\varphi^{-1}(x_{\mu_{\sigma(k)}}), \tag{3.55}$$

iz čega slijedi da je $\Omega_\varphi^{-1}\colon X \to \hat{X}$ simetrizacija. U tom slučaju vrijede relacije

$$\Omega_\varphi^{-1}\Big(\Big(\sum_{\mu=1}^{n} k_\mu x_\mu\Big)^m\Big) = \Big(\sum_{\mu=1}^{n} k_\mu \hat{x}_\mu\Big)^m, \tag{3.56}$$

odnosno

$$\Big(\sum_{\mu=1}^{n} k_\mu \hat{x}_\mu\Big)^m \triangleright 1 = \Big(\sum_{\mu=1}^{n} k_\mu x_\mu\Big)^m, \quad \forall k_\mu \in \mathbb{K}, \quad m \geq 1. \tag{3.57}$$

Cilj nam je konstruirati realizaciju koja zadovoljava svojstvo (3.57). Prvo ćemo promatrati takvu realizaciju za algebru H koju smo uveli u definiciji (2.1).

3.3.1 Weylova simetrična realizacija algebre H

U ovom dijelu ćemo konstruirati realizaciju algebre H koja inducira Weylovo simetrično uređenje na podalgebri $U(\mathfrak{g}_h) \subset H$. Ova realizacija je izražena preko funkcije izvodnice za Bernoullijeve brojeve:

$$\psi(t) = \frac{t}{1-e^{-t}} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!}B_k t^k, \tag{3.58}$$

uz konvenciju $B_1 = -\frac{1}{2}$.

Neka je $\mathbf{C} = [\mathbf{C}_{\mu\nu}]$ $n \times n$ matrica diferencijalnih operatora čiji su elementi dani sa

$$\mathbf{C}_{\mu\nu} = \sum_{\alpha=1}^{n} C_{\mu\alpha\nu}\partial_\alpha, \tag{3.59}$$

gdje su $C_{\mu\alpha\nu}$ strukturne konstante Liejeve algebre (3.11). Definirajmo matricu $e^{\mathbf{C}}$ kao formalni red potencija sa

$$e^{\mathbf{C}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\mathbf{C}^k. \tag{3.60}$$

Prije konstrukcije simetrične realizacije algebre H dokazat ćemo nekoliko tehničkih rezultata koji su ključni u daljnjem izlaganju. Također, u dokazima ćemo koristiti sljedeći indetitet koji vrijedi u asocijativnoj algebri:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k a_k b_{n+1-k} - \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k a_{k+1} b_{n-k} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} (-1)^k a_k b_{n+1-k}. \tag{3.61}$$

Propozicija 3.4 *Matrični elementi* $\mathbf{C}_{\mu\nu} = \sum_\alpha C_{\mu\alpha\nu}\partial_\alpha$ *zadovoljavaju sljedeći identitet:*

$$\sum_{\alpha=1}^{n} (\mathbf{C}^m)_{\mu\alpha} C_{\alpha\lambda\nu} = \sum_{\alpha=1}^{n}\sum_{\beta=1}^{n} \Big[\sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} (-1)^k (\mathbf{C}^k)_{\lambda\alpha} (\mathbf{C}^{m-k})_{\beta\nu} \Big] C_{\mu\alpha\beta}, \quad m \geq 1. \tag{3.62}$$

Dokaz

Dokaz provodimo indukcijom po m. Množeći Jacobijev identitet

$$\sum_{\alpha=1}^{n} \big(C_{\mu\lambda\alpha} C_{\alpha\kappa\nu} + C_{\lambda\kappa\alpha} C_{\alpha\mu\nu} + C_{\kappa\mu\alpha} C_{\alpha\lambda\nu} \big) = 0$$

sa ∂_κ i sumirajući po κ dobijemo izraz

$$\sum_{\alpha=1}^{n} \mathbf{C}_{\mu\alpha} C_{\alpha\lambda\nu} = \sum_{\alpha=1}^{n} \big(C_{\mu\lambda\alpha}\mathbf{C}_{\alpha\nu} - C_{\mu\alpha\nu}\mathbf{C}_{\lambda\alpha} \big)$$

što je jednadžba (3.62) u slučaju kada je $m = 1$. Pretpostavimo sada da tvrdnja vrijedi za $m > 1$. Tada za $m + 1$ imamo

$$\sum_{\alpha=1}^{n} (\mathbf{C}^{m+1})_{\mu\alpha} C_{\alpha\lambda\nu} = \sum_{\alpha=1}^{n} \Big(\sum_{\rho=1}^{n} \mathbf{C}_{\mu\rho} (\mathbf{C}^m)_{\rho\alpha} \Big) C_{\alpha\lambda\nu} = \sum_{\rho=1}^{n} \mathbf{C}_{\mu\rho} \Big(\sum_{\alpha=1}^{n} (\mathbf{C}^m)_{\rho\alpha} C_{\alpha\lambda\nu} \Big).$$

Koristeći pretpostavku indukcije slijedi da je

$$\sum_{\alpha=1}^{n}(\mathbf{C}^{m+1})_{\mu\alpha}C_{\alpha\lambda\nu} = \sum_{\alpha=1}^{n}\sum_{\beta=1}^{n}\left[\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}(-1)^k(\mathbf{C}^k)_{\lambda\alpha}(\mathbf{C}^{m-k})_{\beta\nu}\right]\Big(\sum_{\rho=1}^{n}\mathbf{C}_{\mu\rho}C_{\rho\alpha\beta}\Big).$$

Uvrštavanjem (3.62) u prethodni izraz dobijemo

$$\begin{aligned}
&\sum_{\alpha=1}^{n}(\mathbf{C}^{m+1})_{\mu\alpha}C_{\alpha\lambda\nu}\\
&= \sum_{\alpha=1}^{n}\sum_{\beta=1}^{n}\left[\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}(-1)^k(\mathbf{C}^k)_{\lambda\alpha}(\mathbf{C}^{m-k})_{\beta\nu}\right]\Big(\sum_{\rho=1}^{n}(C_{\mu\alpha\rho}\mathbf{C}_{\rho\beta} - C_{\mu\rho\beta}\mathbf{C}_{\alpha\rho})\Big)\\
&= \sum_{\rho=1}^{n}\sum_{\alpha=1}^{n}\left[\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}(-1)^k(\mathbf{C}^k)_{\lambda\alpha}\Big(\sum_{\beta=1}^{n}\mathbf{C}_{\rho\beta}(\mathbf{C}^{m-k})_{\beta\nu}\Big)\right]C_{\mu\alpha\rho}\\
&- \sum_{\rho=1}^{n}\sum_{\beta=1}^{n}\left[\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}(-1)^k\Big(\sum_{\alpha}(\mathbf{C}^k)_{\lambda\alpha}\mathbf{C}_{\alpha\rho}\Big)(\mathbf{C}^{m-k})_{\beta\nu}\right]C_{\mu\rho\beta}\\
&= \sum_{\alpha=1}^{n}\sum_{\beta=1}^{n}\left[\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}(-1)^k(\mathbf{C}^k)_{\lambda\alpha}(\mathbf{C}^{m+1-k})_{\beta\nu} - \sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}(-1)^k(\mathbf{C}^{k+1})_{\lambda\alpha}(\mathbf{C}^{m-k})_{\beta\nu}\right]C_{\mu\alpha\beta}.
\end{aligned} \tag{3.63}$$

Koristeći identitet (3.61) iz (3.63) proizlazi da je

$$\sum_{\alpha=1}^{n}(\mathbf{C}^{m+1})_{\mu\alpha}\,C_{\alpha\lambda\nu} = \sum_{\alpha=1}^{n}\sum_{\beta=1}^{n}\left[\sum_{k=0}^{m+1}\binom{m+1}{k}(-1)^k(\mathbf{C}^k)_{\lambda\alpha}(\mathbf{C}^{m+1-k})_{\beta\nu}\right]C_{\mu\alpha\beta}, \tag{3.64}$$

čime je tvrdnja dokazana za $\forall m \in \mathbb{N}$. ■

Propozicija 3.5

$$\frac{\partial}{\partial\partial_\lambda}(\mathbf{C}^m)_{\mu\nu} = \sum_{\alpha=1}^{n}\sum_{\beta=1}^{n}C_{\mu\alpha\beta}\left[\sum_{k=1}^{m}\binom{m}{k}(-1)^{k-1}(\mathbf{C}^{k-1})_{\lambda\alpha}(\mathbf{C}^{m-k})_{\beta\nu}\right], \quad m \geq 1. \tag{3.65}$$

Dokaz

Dokaz provodimo indukcijom po m. Za slučaj kada je $m = 1$ desna strana od (3.65) je jednaka

$$\sum_{\alpha=1}^{n}\sum_{\beta=1}^{n}C_{\mu\alpha\beta}(\mathbf{I})_{\lambda\alpha}(\mathbf{I})_{\beta\nu} = \sum_{\alpha=1}^{n}\sum_{\beta=1}^{n}C_{\mu\alpha\beta}\delta_{\lambda\alpha}\delta_{\beta\nu} = C_{\mu\lambda\nu} \tag{3.66}$$

S obzirom da je $\frac{\partial}{\partial\partial_\lambda}\mathbf{C}_{\mu\nu} = C_{\mu\lambda\nu}$, vidimo da tvrdnja vrijedi za $m = 1$. Pretpostavimo sada da tvrdnja vrijedi za $m > 1$. Tada, koristeći Leibnizovo pravilo imamo da je

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial\partial_\lambda}(\mathbf{C}^{m+1})_{\mu\nu} &= \frac{\partial}{\partial\partial_\lambda}(\sum_{\rho=1}^{n}(\mathbf{C}^m)_{\mu\rho}\mathbf{C}_{\rho\nu}) \\ &= \sum_{\rho=1}^{n}\frac{\partial}{\partial\partial_\lambda}(\mathbf{C}^m)_{\mu\rho}\mathbf{C}_{\rho\nu} + \sum_{\rho=1}^{n}(\mathbf{C}^m)_{\mu\rho}C_{\rho\lambda\nu}.\end{aligned} \tag{3.67}$$

Sada za prvi član u (3.67) uz pretpostavku indukcije dobivamo

$$\begin{aligned}\sum_{\rho=1}^{n}\frac{\partial}{\partial\partial_\lambda}(\mathbf{C}^m)_{\mu\rho}\mathbf{C}_{\rho\nu} &= \sum_{\rho=1}^{n}\left(\sum_{\alpha=1}^{n}\sum_{\beta=1}^{n}C_{\mu\alpha\beta}\left[\sum_{k=1}^{m}\binom{m}{k}(-1)^{k-1}(\mathbf{C}^{k-1})_{\lambda\alpha}(\mathbf{C}^{m-k})_{\beta\rho}\right]\right)\mathbf{C}_{\rho\nu} \\ &= \sum_{\alpha=1}^{n}\sum_{\beta=1}^{n}C_{\mu\alpha\beta}\left[\sum_{k=1}^{m}\binom{m}{k}(-1)^{k-1}(\mathbf{C}^{k-1})_{\lambda\alpha}\sum_{\rho=1}^{n}(\mathbf{C}^{m-k})_{\beta\nu}\mathbf{C}_{\rho\nu}\right] \\ &= \sum_{\alpha=1}^{n}\sum_{\beta=1}^{n}C_{\mu\alpha\beta}\left[\sum_{k=1}^{m}\binom{m}{k}(-1)^{k-1}(\mathbf{C}^{k-1})_{\lambda\alpha}\sum_{\rho=1}^{n}(\mathbf{C}^{m+1-k})_{\beta\nu}\right].\end{aligned}$$

Iz prethodne propozicije slijedi da je drugi član u (3.67) jednak

$$\sum_{\rho=1}^{n}(\mathbf{C}^m)_{\mu\rho}C_{\rho\lambda\nu} = \sum_{\alpha=1}^{n}\sum_{\beta=1}^{n}C_{\mu\alpha\beta}\Big[\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}(-1)^k(\mathbf{C}^k)_{\lambda\alpha}(\mathbf{C}^{m-k})_{\beta\nu}\Big]. \tag{3.68}$$

Zbrajajući (3.67) i (3.68) i koristeći binomni identitet $\binom{m}{k} + \binom{m}{k-1} = \binom{m+1}{k}$ dobivamo

$$\frac{\partial}{\partial\partial_\lambda}(\mathbf{C}^{m+1})_{\mu\nu} = \sum_{\alpha=1}^{n}\sum_{\beta=1}^{n}C_{\mu\alpha\beta}\left[\sum_{k=1}^{m+1}\binom{m+1}{k}(-1)^{k-1}(\mathbf{C}^{k-1})_{\lambda\alpha}(\mathbf{C}^{m+1-k})_{\beta\nu}\right], \tag{3.69}$$

čime smo dokazali tvrdnju za $\forall m \in \mathbb{N}$. ■

Lema 3.2

$$\frac{\partial}{\partial\partial_\lambda}(e^{\mathbf{C}})_{\mu\nu} = \sum_{\alpha=1}^{n}\sum_{\beta=1}^{n}C_{\mu\alpha\beta}\left(\frac{1-e^{-\mathbf{C}}}{\mathbf{C}}\right)_{\lambda\alpha}(e^{\mathbf{C}})_{\beta\nu}. \tag{3.70}$$

Dokaz

Iz prethodne propozicije slijedi da je

$$\frac{\partial}{\partial\partial_\lambda}(e^{\mathbf{C}})_{\mu\nu} = \sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m!}\frac{\partial}{\partial\partial_\lambda}(\mathbf{C}^m)_{\mu\nu}$$
$$= \sum_{\alpha=1}^{n}\sum_{\beta=1}^{n} C_{\mu\alpha\beta}\left[\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{m!}\binom{m}{k}(-1)^{k-1}(\mathbf{C}^{k-1})_{\lambda\alpha}(\mathbf{C}^{m-k})_{\beta\nu}\right]. \tag{3.71}$$

Izraz (3.71) možemo napisati kao umnožak dva reda koristeći formulu za Cauchyev umnožak

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{m} A_{k-1}B_{m-k}(\mathbf{C}^{k-1})_{\lambda\alpha}(\mathbf{C}^{m-k})_{\beta\nu} = \left(\sum_{m=0}^{\infty} A_m(\mathbf{C}^m)_{\lambda\alpha}\right)\left(\sum_{m=0}^{\infty} B_m(\mathbf{C}^m)_{\beta\nu}\right), \tag{3.72}$$

gdje je $A_k = (-1)^k/(k+1)!$ i $B_k = 1/k!$. Tada je

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{m!}\binom{m}{k}(-1)^{k-1}(\mathbf{C}^{k-1})_{\lambda\alpha}(\mathbf{C}^{m-k})_{\beta\nu} =$$
$$\left(\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{(m+1)!}(\mathbf{C}^m)_{\lambda\alpha}\right)\left(\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}(\mathbf{C}_{\beta\nu}\right) = \left(\frac{1-e^{-\mathbf{C}}}{\mathbf{C}}\right)_{\lambda\alpha}(e^{\mathbf{C}})_{\beta\nu},$$

iz čega slijedi

$$\frac{\partial}{\partial\partial_\lambda}(e^{\mathbf{C}})_{\mu\nu} = \sum_{\alpha=1}^{n}\sum_{\beta=1}^{n} C_{\mu\alpha\beta}\left(\frac{1-e^{-\mathbf{C}}}{\mathbf{C}}\right)_{\lambda\alpha}(e^{\mathbf{C}})_{\beta\nu}. \tag{3.73}$$

■

Propozicija 3.6

$$\sum_{\alpha=1}^{n}\sum_{\rho=1}^{n} C_{\beta\rho\alpha}(e^{-\mathbf{C}})_{\mu\rho}(e^{\mathbf{C}})_{\alpha\kappa} = \sum_{\alpha=1}^{n} C_{\alpha\mu\kappa}(e^{\mathbf{C}})_{\beta\alpha} \tag{3.74}$$

$$\sum_{\alpha=1}^{n}\sum_{\kappa=1}^{n} C_{\alpha\mu\kappa}(e^{\mathbf{C}})_{\beta\alpha}(e^{-\mathbf{C}})_{\kappa\nu} = \sum_{\alpha=1}^{n} C_{\beta\rho\kappa}(e^{-\mathbf{C}})_{\mu\rho} \tag{3.75}$$

Dokaz

Iz propozicije (3.4) slijedi da je

$$\begin{aligned}\sum_{\alpha=1}^{n} C_{\alpha\mu\kappa}(e^{\mathbf{C}})_{\beta\alpha} &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!}\left(\sum_{\alpha=1}^{n} C_{\alpha\mu\kappa}(\mathbf{C}^m)_{\beta\alpha}\right) \\ &= \sum_{\rho=1}^{n}\sum_{\alpha=1}^{n}\left[\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{m}{k}(-1)^k(\mathbf{C}^k)_{\mu\rho}(\mathbf{C}^{m-k})_{\alpha\kappa}\right] C_{\beta\rho\alpha} \qquad (3.76)\end{aligned}$$

S druge strane, razvojem $(e^{-\mathbf{C}})_{\mu\rho}(e^{\mathbf{C}})_{\alpha\kappa}$ u formalni red potencija te primjenom formule za Cauchyev umnošak dobivamo

$$(e^{-\mathbf{C}})_{\mu\rho}(e^{\mathbf{C}})_{\alpha\kappa} = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{m}{k}(-1)^k(\mathbf{C}^k)_{\mu\rho}(\mathbf{C}^{m-k})_{\alpha\kappa}, \qquad (3.77)$$

iz čega slijedi da je

$$\sum_{\alpha=1}^{n} C_{\alpha\mu\kappa}(e^{\mathbf{C}})_{\beta\alpha} = \sum_{\alpha=1}^{n}\sum_{\rho=1}^{n} C_{\beta\rho\alpha}(e^{-\mathbf{C}})_{\mu\rho}(e^{\mathbf{C}})_{\alpha\kappa}. \qquad (3.78)$$

Drugu tvrdnju ćemo dokazati tako da (3.78) pomnožimo sa $(e^{-\mathbf{C}})_{\kappa\nu}$ i sumiramo po κ čime dobivamo

$$\begin{aligned}\sum_{\alpha=1}^{n}\sum_{\kappa=1}^{n} C_{\alpha\mu\kappa}(e^{\mathbf{C}})_{\beta\alpha}(e^{-\mathbf{C}})_{\kappa\nu} &= \sum_{\alpha=1}^{n}\sum_{\rho=1}^{n} C_{\beta\rho\alpha}(e^{-\mathbf{C}})_{\mu\rho}\left(\sum_{\kappa=1}^{n}(e^{\mathbf{C}})_{\alpha\kappa}(e^{-\mathbf{C}})_{\kappa\nu}\right) \\ &= \sum_{\alpha=1}^{n}\sum_{\rho=1}^{n} C_{\beta\rho\alpha}(e^{-\mathbf{C}})_{\mu\rho}\delta_{\alpha\nu} = \sum_{\alpha=1}^{n} C_{\beta\rho\kappa}(e^{-\mathbf{C}})_{\mu\rho}. \qquad (3.79)\end{aligned}$$

■

Koristeći prethodne rezultate, sada možemo konstruirati realizaciju algebre H koja je dana sljedećim teoremom.

Teorem 3.1 *Algebra H dana definicijom* (2.1) *ima realizaciju oblika*

$$\hat{x}_\mu = \sum_{\alpha=1}^{n} x_\alpha \psi_{\mu\alpha}(\mathbf{C}), \quad \hat{T}_{\mu\nu} = (e^{\mathbf{C}})_{\mu\nu}, \quad \hat{T}^{-1}_{\mu\nu} = (e^{-\mathbf{C}})_{\mu\nu}. \qquad (3.80)$$

Ovdje $\psi_{\mu\nu}(\mathbf{C})$ označava (μ,ν)-ti element matrice $\psi(\mathbf{C})$, gdje je $\psi(t)$ dana sa (3.58).

Dokaz

Promatrajmo prvo podalgebru $U(\mathfrak{g}^L)$. Definirajmo realizaciju od $T_{\mu\nu}$ sa $\hat{T}_{\mu\nu} = (e^{\mathbf{C}})_{\mu\nu}$. Tada je očito $\hat{T}_{\mu\nu} \triangleright 1 = \delta_{\mu\nu}1$. Nadalje, očito vrijedi da je $[\hat{T}_{\mu\nu}, \hat{T}_{\alpha\beta}] = 0$. Želimo definirati realizaciju od X_μ oblika $\hat{x}_\mu = \sum_{\alpha=1}^{n} x_\alpha \varphi_{\mu\alpha}(\partial)$ tako da vrijedi

$$[\hat{T}_{\mu\nu}, \hat{x}_\lambda] = \sum_{\alpha=1}^{n} C_{\mu\lambda\alpha}\hat{T}_{\alpha\nu}. \tag{3.81}$$

Lema (3.2) povlači da je

$$\frac{\partial}{\partial\partial_\lambda}\hat{T}_{\mu\nu} = \sum_{\alpha=1}^{n}\sum_{\beta=1}^{n} C_{\mu\alpha\beta}\left(\frac{1-e^{-\mathbf{C}}}{\mathbf{C}}\right)_{\lambda\alpha}\hat{T}_{\beta\nu}, \tag{3.82}$$

iz čega slijedi da je komutator $[\hat{T}_{\mu\nu}, \hat{x}_\lambda]$ oblika

$$[\hat{T}_{\mu\nu}, \hat{x}_\lambda] = \sum_{\alpha=1}^{n}\sum_{\beta=1}^{n} C_{\mu\alpha\beta}\left[\sum_{\kappa=1}^{n}\left(\frac{1-e^{-\mathbf{C}}}{\mathbf{C}}\right)_{\kappa\alpha}\varphi_{\kappa\lambda}\right]\hat{T}_{\beta\nu}. \tag{3.83}$$

Iz (3.83) je očigledno je da za funkciju $\varphi_{\kappa\lambda}$ treba odabrati odabrati funkciju izvodnicu za Bernoullijeve brojeve, tj.

$$\varphi_{\kappa\lambda}(\partial) = \left(\frac{\mathbf{C}}{1-e^{-\mathbf{C}}}\right)_{\lambda\kappa} = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m!}B_m(\mathbf{C}^m)_{\lambda\kappa}, \tag{3.84}$$

uz konvenciju $B_1 = -\frac{1}{2}$. Sada jednadžba (3.83) ima oblik

$$[\hat{T}_{\mu\nu}, \hat{x}_\lambda] = \sum_{\alpha=1}^{n}\sum_{\beta=1}^{n} C_{\mu\alpha\beta}\delta_{\alpha\lambda}\hat{T}_{\beta\nu} = \sum_{\beta=1}^{n} C_{\mu\lambda\beta}\hat{T}_{\beta\nu}, \tag{3.85}$$

kao što smo i zahtijevali relacijom (3.81). Za izbor funkcije $\varphi_{\kappa\lambda}$ relacijom (3.84), generatori $\hat{x}_\mu$ su dani sljedećim izrazom

$$\hat{x}_\mu = \sum_{\alpha=1}^{n} x_\alpha\psi_{\mu\alpha}(\mathbf{C}) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{\alpha=1}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}B_k x_\alpha(\mathbf{C}^k)_{\mu\alpha}, \tag{3.86}$$

gdje je $\psi(t)$ funkcija izvodnica za Bernoullijeve brojeve (3.58). Sljedeći korak u dokazu je pokazati da generatori $\hat{x}_\mu$ zadovoljavaju komutacijske relacije $[\hat{x}_\mu, \hat{x}_\nu] =$

$\sum_{\alpha=1}^{n} C_{\mu\nu\alpha}\hat{x}_\alpha$. S obzirom da je algebra $\hat{A}_n$ asocijativna, operatori $\hat{T}_{\alpha\beta}$, $\hat{x}_\mu$ i $\hat{x}_\nu$ zadovoljavaju Jacobijev identitet

$$[[\hat{x}_\mu, \hat{x}_\nu], \hat{T}_{\alpha\beta}] + [[\hat{x}_\nu, \hat{T}_{\alpha\beta}], \hat{x}_\mu] + [[\hat{T}_{\alpha\beta}, \hat{x}_\nu], \hat{x}_\mu] = 0. \tag{3.87}$$

Uvrštavajući (3.81) u (3.87) imamo da je

$$[[\hat{x}_\mu, \hat{x}_\nu], \hat{T}_{\alpha\beta}] + \sum_{\lambda=1}^{n}\sum_{\rho=1}^{n} \left(C_{\alpha\mu\rho}C_{\rho\nu\lambda} - C_{\alpha\nu\rho}C_{\rho\nu\lambda}\right)\hat{T}_{\lambda\beta} = 0. \tag{3.88}$$

Koristeći Jacobijev identitet za $C_{\mu\nu\lambda}$ iz relacije (3.88) slijedi

$$[[\hat{x}_\mu, \hat{x}_\nu], \hat{T}_{\alpha\beta}] = \sum_{\lambda=1}^{n}\left(\sum_{\rho=1}^{n} C_{\mu\nu\rho}C_{\rho\alpha\lambda}\right)\hat{T}_{\lambda\beta}. \tag{3.89}$$

S obzirom da je matrica $\psi(\mathbf{C})$ invertibilna, varijablu x_μ možemo izraziti kao $x_\mu = \sum_{\alpha=1}^{n} \hat{x}_\alpha(\psi^{-1}(\mathbf{C}))_{\mu\alpha}$. Ovo implicira da je

$$[\hat{x}_\mu, \hat{x}_\nu] = \sum_{\rho=1}^{n} \hat{x}_\rho k_{\mu\nu\rho}(\partial) \tag{3.90}$$

za neki formalni red potencija $k_{\mu\nu\rho}(\partial)$ što povlači

$$[[\hat{x}_\mu, \hat{x}_\nu], \hat{T}_{\alpha\beta}] = \sum_{\rho=1}^{n}[\hat{x}_\rho, \hat{T}_{\alpha\beta}]k_{\mu\nu\rho}(\partial) = \sum_{\lambda=1}^{n}\left(\sum_{\rho=1}^{n} k_{\mu\nu\rho}(\partial)C_{\rho\alpha\lambda}\right)\hat{T}_{\lambda\beta}. \tag{3.91}$$

Uspoređujući jednadžbe (3.89) i (3.91) i uzimajući u obzir da je matrica $\hat{T} = e^{\mathbf{C}}$ invertibilna zaključujemo da je

$$\sum_{\rho=1}^{n} k_{\mu\nu\rho}(\partial)C_{\rho\alpha\lambda} = \sum_{\rho=1}^{n} C_{\mu\nu\rho}C_{\rho\alpha\lambda}. \tag{3.92}$$

Stoga, formalni red potencija sadrži samo konstantni član, tj. $k_{\mu\nu\rho}(\partial) = k^0_{\mu\nu\rho} \in \mathbb{K}$. Tvrdimo da je $k^0_{\mu\nu\rho} = C_{\mu\nu\rho}$. Iz relacije (3.90) i definicije djelovanja $\triangleright$ slijedi da je

$$[\hat{x}_\mu, \hat{x}_\nu] \triangleright 1 = \sum_{\rho=1}^{n} k^0_{\mu\nu\rho}x_\rho. \tag{3.93}$$

Lijeva strana jednadžbe (3.93) je jednaka

$$[\hat{x}_\mu, \hat{x}_\nu] \triangleright 1 = \hat{x}_\mu \triangleright x_\nu - \hat{x}_\nu \triangleright x_\mu. \tag{3.94}$$

Iz činjenice da je $\hat{x}_\mu$ dan relacijom (3.86) te da za operator $(\mathbf{C}^k)_{\mu\alpha}$ vrijedi

$$(\mathbf{C}^k)_{\mu\alpha} \triangleright x_\nu = \begin{cases} \delta_{\mu\alpha} x_\nu, & k = 0 \\ C_{\mu\nu\alpha}, & k = 1 \\ 0, & k \geq 2, \end{cases} \tag{3.95}$$

proizlazi da je

$$\hat{x}_\mu \triangleright x_\nu = x_\mu x_\nu + \frac{1}{2} \sum_{\rho=1}^{n} C_{\mu\nu\rho} x_\rho. \tag{3.96}$$

Konačno, relacije (3.94) i (3.96) impliciraju da je

$$[\hat{x}_\mu, \hat{x}_\nu] \triangleright 1 = \sum_{\rho=1}^{n} C_{\mu\nu\rho} x_\rho, \tag{3.97}$$

tj. $k^0_{\mu\nu\rho} = C_{\mu\nu\rho}$.

Slično se pokaže i da algebra $U(\mathfrak{g}_h^R)$ ima realizaciju definiranu sa (3.86) i $\hat{T}^{-1}_{\mu\nu} = (e^{-\mathbf{C}})_{\mu\nu}$. Nadalje, očito vrijedi da je

$$\sum_{\alpha=1}^{n} \hat{T}_{\mu\alpha} \hat{T}^{-1}_{\alpha\nu} = \sum_{\alpha=1}^{n} \hat{T}^{-1}_{\mu\alpha} \hat{T}_{\alpha\nu} = \delta_{\mu\nu} \tag{3.98}$$

iz čega slijedi da je (3.80) realizacija algebre H. ■

Ovdje je prezentiran alternativni dokaz za realizaciju (3.86) koja je pronađena u radu [17]. U navedenom radu dano je nekoliko dokaza koristeći direktni račun, formalnu geometriju i strukturu koalgebre. Naš pristup omogućava da pomoću njega dobijemo realizaciju algebre H i konstruiramo lijevo-desne dualne realizacije što ćemo kasnije i pokazati. Kako smo već istakli, različitim realizacijama odgovaraju različita uređenja na omotačkoj algebri $U(\mathfrak{g})$ s obzirom na izomorfizam vektorskih prostora $\Omega_\varphi^{-1}\colon X \to \hat{X} \cong U(\mathfrak{g})$. Sljedećim rezultatom ćemo pokazati da realizacija (3.86) inducira Weylovo simetrično uređenje na $U(\mathfrak{g}_h)$.

Teorem 3.2 *Neka su generatori od $U(\mathfrak{g}_h)$ dani realizacijom* (3.86)*. Tada $\hat{x}_\mu$ zadovoljava simetrizacijsko svojstvo*

$$\left(\sum_{\mu=1}^{n} k_\mu \hat{x}_\mu\right)^m \triangleright 1 = \left(\sum_{\mu=1}^{n} k_\mu x_\mu\right)^m, \ m \geq 1, \ \forall k \in \mathbb{R}^n. \tag{3.99}$$

Dokaz

Relaciju (3.99) ćemo dokazati indukcijom po m. Za $m = 1$ tvrdnja očito vrijedi jer je $\hat{x}_\mu \triangleright 1 = x_\mu$. Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za neki $m > 1$. Tada po pretpostavci indukcije imamo

$$\left(\sum_{\mu=1}^{n} k_\mu \hat{x}_\mu\right)^{m+1} \triangleright 1 = \left(\sum_{\mu=1}^{n} k_\mu \hat{x}_\mu\right) \triangleright \left(\sum_{\mu=1}^{n} k_\mu x_\mu\right)^m. \tag{3.100}$$

Definirajmo polinome

$$P_m(x) = \left(\sum_{\mu=1}^{n} k_\mu x_\mu\right)^m, \ m \geq 1. \tag{3.101}$$

Realizacija od $\hat{x}_\mu$ je oblika

$$\hat{x}_\mu = x_\mu + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\alpha=1}^{n} a_k x_\alpha (\mathbf{C}^k)_{\mu\alpha}, \tag{3.102}$$

gdje je $a_k = (-1)^k B_k / k!$. Uvrštavajući (3.102) u (3.100) dobivamo

$$\begin{aligned} \left(\sum_{\mu=1}^{n} k_\mu \hat{x}_\mu\right)^{m+1} \triangleright 1 &= \sum_{\mu=1}^{n} \left(k_\mu x_\mu + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\alpha=1}^{n} a_k k_\mu x_\alpha (\mathbf{C}^k)_{\mu\alpha} \triangleright P_m(x)\right) \\ &= P_{m+1}(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\alpha=1}^{n} a_k x_\alpha \left(\sum_{\mu=1}^{n} k_\mu (\mathbf{C}^k)_{\mu\alpha} \triangleright P_m(x)\right). \end{aligned} \tag{3.103}$$

Promatrajmo sada djelovanje matričnog elementa $(\mathbf{C}^k)_{\mu\alpha}$ na polinom $P_m(x)$. Za $k = 1$ imamo

$$\mathbf{C}_{\mu\alpha} \triangleright P_m(x) = m P_{m-1}(x) \sum_{\rho=1}^{n} C_{\mu\rho\alpha} k_\rho. \tag{3.104}$$

Definirajmo koeficijente $K_{\mu\alpha} = \sum_{\rho=1}^{n} C_{\mu\rho\alpha} k_\rho$. Za $k = 2$ vrijedi

$$(\mathbf{C}^2)_{\mu\alpha} \triangleright P_m(x) = \sum_{\beta=1}^{n} \mathbf{C}_{\mu\beta} \triangleright (\mathbf{C}_{\beta\alpha} \triangleright P_m(x)) = m(m-1)P_{m-2}(x) \sum_{\beta=1}^{n} K_{\mu\beta} K_{\beta\alpha}. \tag{3.105}$$

Lako se pokaže da je za $k \geq 2$ djelovanje dano sa

$$(\mathbf{C}^k)_{\mu\alpha} \triangleright P_m(x) = \frac{m!}{(m-k)!} P_{m-k}(x) \sum_{\beta_1=1}^{n} \sum_{\beta_2=1}^{n} \cdots \sum_{\beta_{k-1}=1}^{n} K_{\mu\beta_{k-1}} K_{\beta_{k-1}\beta_{k-2}} \dots K_{\beta_1\alpha}. \tag{3.106}$$

Radi jednostavnosti uvedimo sljedeće oznake:

$$K^1_{\mu\alpha} = K_{\mu\alpha}, \tag{3.107}$$

$$K^k_{\mu\alpha} = \sum_{\beta_1=1}^{n} \sum_{\beta_2=1}^{n} \cdots \sum_{\beta_{k-1}=1}^{n} K_{\mu\beta_{k-1}} K_{\beta_{k-1}\beta_{k-2}} \dots K_{\beta_1\alpha}, \ k \geq 2. \tag{3.108}$$

Tada jednadžbe (3.105) i (3.106) možemo zapisati u obliku

$$(\mathbf{C}^k)_{\mu\alpha} \triangleright P_m(x) = \frac{m!}{(m-k)!} P_{m-k}(x) K^k_{\mu\alpha}, \ k \geq 1. \tag{3.109}$$

Koristeći antisimetričnost strukturnih konstanti, $C_{\mu\nu\lambda} = -C_{\nu\mu\lambda}$, sada slijedi da je

$$\sum_{\mu=1}^{n} k_\mu K_{\mu\alpha} = \sum_{\mu=1}^{n} \sum_{\rho=1}^{n} C_{\mu\rho\alpha} k_\rho = 0 \tag{3.110}$$

što implicira

$$\sum_{\mu=1}^{n} k_\mu K^k_{\mu\alpha} = \sum_{\beta_1=1}^{n} \sum_{\beta_2=1}^{n} \cdots \sum_{\beta_{k-1}=1}^{n} \left(\sum_{\mu=1}^{n} k_\mu K_{\mu\beta_{k-1}} \right) K_{\beta_{k-1}\beta_{k-2}} \dots K_{\beta_1\alpha} = 0, \ k \geq 1. \tag{3.111}$$

Sada supstitucijom (3.111) u (3.109) dobivamo

$$\sum_{\mu=1}^{n} k_\mu (\mathbf{C}^k)_{\mu\alpha} \triangleright P_m(x) = \frac{m!}{(m-k)!} P_{m-k}(x) \sum_{\mu=1}^{n} k_\mu K^k_{\mu\alpha} = 0, \ \forall k \geq 1. \tag{3.112}$$

Iz prethodne relacije slijedi da drugi član u relaciji (3.103) izčezava, stoga je

$$\left(\sum_{\mu=1}^{n} k_\mu \hat{x}_\mu \right)^{m+1} \triangleright 1 = P_{m+1}(x). \tag{3.113}$$

Dakle, tvrdnja (3.99) vrijedi za svaki $m \in \mathbb{N}$. ■

3.3.2 Lijevo-desna dualnost Weylove simetrične realizacije

U drugom poglavlju smo u proširenoj algebri H definirali elemente $Y_\mu = \sum_{\alpha=1}^n X_\alpha T_{\mu\alpha}^{-1}$ koji djeluju kao lijevo množenje sa X_μ , $Y_\mu \blacktriangleright X = XX_\mu$, $\forall X \in U(\mathfrak{g})$. Označimo sa $\hat{y}_\mu$ realizaciju od Y_μ. Tada uvrštavajući realizaciju (3.80) za generatore X_μ i $T_{\mu\nu}^{-1}$ dobivamo

$$\hat{y}_\mu = \sum_{\alpha=1}^n \hat{x}_\alpha \hat{T}_{\mu\alpha}^{-1} = \sum_{\alpha=1}^n x_\alpha \tilde{\psi}_{\mu\alpha}(\mathbf{C}), \tag{3.114}$$

gdje je $\tilde{\psi}_{\mu\alpha} = \left(e^{-\mathbf{C}}\psi(\mathbf{C})\right)_{\mu\alpha}$. Primijetimo da je $\tilde{\psi}(t) = e^{-t}\psi(t)$ također funkcija izvodnica za Bernoullijeve brojeve jer je

$$\tilde{\psi}(t) = e^{-t}\psi(t) = \frac{t}{e^t - 1} = \sum_{k=0}^\infty \frac{(-1^k)}{k!} B_k t^k, \tag{3.115}$$

uz konvenciju $B_1 = 1/2$. Sljedećim teoremom ćemo pokazati da su $\hat{x}_\mu = \sum_{\alpha=1}^n x_\alpha \psi_{\mu\alpha}(\mathbf{C})$ i $\hat{y}_\mu = \sum_{\alpha=1}^n x_\alpha \tilde{\psi}_{\mu\alpha}(\mathbf{C})$ dualne realizacije Liejeve algebre $\mathfrak{g}_h$ jer inducirani zvijezda-umnošci zadovoljavaju $f * g = g \tilde{*} f$, $\forall f, g \in X$.

Teorem 3.3 *Neka su $\mathfrak{g}_h$ i $\tilde{\mathfrak{g}}_h$ Liejeve algebre* (3.6) *i* (3.44). *Definirajmo linearna preslikavanja $\psi\colon \mathfrak{g}_h \to \hat{A}_n$ i $\tilde{\psi}\colon \tilde{\mathfrak{g}}_h \to \hat{A}_n$ sa*

$$\psi(X_\mu) = \hat{x}_\mu = \sum_{\alpha=1}^n \psi_{\mu\alpha}(\mathbf{C}) \quad i \quad \tilde{\psi}(Y_\mu) = \hat{y}_\mu = \sum_{\alpha=1}^n x_\alpha \tilde{\psi}_{\mu\alpha}(\mathbf{C}), \tag{3.116}$$

gdje su $\psi(t) = t/(1 - e^{-t})$ i $\tilde{\psi}(t) = t/(e^t - 1)$. Tada su inducirani zvijezda-umnošci

$$f * g = \Omega_\varphi(\Omega_\varphi^{-1}(f)\Omega_\varphi^{-1}(g)) \quad i \quad f \tilde{*} g = \Omega_{\tilde{\psi}}(\Omega_{\tilde{\psi}}^{-1}(f)\Omega_{\tilde{\psi}}^{-1}(g)) \tag{3.117}$$

u lijevo-desnoj dualnosti, tj. $f * g = g \tilde{*} f$, $\forall f, g \in X$.

Dokaz

U teoremu (3.1) smo pokazali da je homomorfizam ψ realizacija od $\mathfrak{g}_h$. Sada ćemo pokazati da je $\tilde{\psi}$ realizacija od $\tilde{\mathfrak{g}}_h$. Elementi $\hat{y}_\mu \in \hat{A}_n$ su definirani sa $\hat{y}_\mu = \sum_{\alpha=1}^n \hat{x}_\alpha \hat{T}_{\mu\alpha}^{-1}$

pa iz propozicije (2.1) slijedi da $\hat{x}_\mu$ i $\hat{y}_\mu$ komutiraju. Stoga imamo da je

$$[\hat{y}_\mu, \hat{y}_\nu] = \sum_{\alpha=1}^{n} \hat{x}_\alpha [\hat{T}^{-1}_{\mu\alpha}, \hat{y}_\nu]. \tag{3.118}$$

Iz relacije (2.35) slijedi

$$[\hat{T}^{-1}_{\mu\alpha}, \hat{y}_\nu] = \sum_{\beta=1}^{n} \sum_{\rho=1}^{n} C_{\beta\rho\alpha} \hat{T}^{-1}_{\mu\rho} \hat{T}^{-1}_{\nu\beta}, \tag{3.119}$$

stoga uvrštavajući prethodni izraz (3.119) u (3.118) dobivamo

$$[\hat{y}_\mu, \hat{y}_\nu] = \sum_{\alpha=1}^{n} \sum_{\beta=1}^{n} \sum_{\rho=1}^{n} C_{\beta\rho\alpha} \hat{x}_\alpha \hat{T}^{-1}_{\mu\rho} \hat{T}^{-1}_{\nu\beta}. \tag{3.120}$$

Koristeći $\hat{x}_\alpha = \sum_{\kappa=1}^{n} \hat{y}_\kappa \hat{T}_{\alpha\kappa}$, izraz (3.120) možemo napisati u obliku

$$[\hat{y}_\mu, \hat{y}_\nu] = \sum_{\kappa=1}^{n} \hat{y}_\kappa \left(\sum_{\alpha=1}^{n} \sum_{\beta=1}^{n} \sum_{\rho=1}^{n} C_{\beta\rho\alpha} \hat{T}_{\alpha\kappa} \hat{T}^{-1}_{\mu\rho} \hat{T}^{-1}_{\nu\beta} \right). \tag{3.121}$$

Iz propozicije (3.6) slijedi da operatori $\hat{T}_{\mu\nu} = (e^{\mathbf{C}})_{\mu\nu}$ i $\hat{T}^{-1}_{\mu\nu} = (e^{\mathbf{C}})^{-1}_{\mu\nu}$ zadovoljavaju sljedeći identitet

$$\sum_{\alpha=1}^{n} \sum_{\rho=1}^{n} C_{\beta\alpha\rho} \hat{T}_{\alpha\kappa} \hat{T}^{-1}_{\mu\rho} = \sum_{\alpha=1}^{n} C_{\alpha\mu\rho} \hat{T}^{-1}_{\beta\alpha}. \tag{3.122}$$

Množeći gornji izraz sa $\hat{T}^{-1}_{\nu\beta}$ i sumirajući po β nalazimo da

$$\sum_{\alpha=1}^{n} \sum_{\beta=1}^{n} \sum_{\rho=1}^{n} C_{\beta\alpha\rho} \hat{T}_{\alpha\kappa} \hat{T}^{-1}_{\mu\rho} \hat{T}^{-1}_{\nu\beta} = -C_{\mu\nu\kappa}. \tag{3.123}$$

Iz (3.121) slijedi da generatori $\hat{y}_\mu$ zadovoljavaju komutacijske relacije

$$[\hat{y}_\mu, \hat{y}_\nu] = -\sum_{\kappa=1}^{n} C_{\mu\nu\kappa} \hat{y}_\kappa \tag{3.124}$$

stoga je $\tilde{\psi}$ realizacija od $\tilde{g}_h$. Nadalje, s obzirom da je $[\hat{x}_\mu, \hat{y}_\nu] = 0$, iz propozicije (3.3) slijedi da su zvijezda-umnošci (3.117) u lijevo-desnoj dualnosti. ■

Poglavlje 4

Kapa-deformirani prostor i neke realizacije kapa-deformiranog Euklidskog prostora

4.1 Uvod

Vrlo važan primjer nekomutativnog prostora u matematičkoj fizici je κ-deformirani prostor. Kapa-deformirani prostor u oznaci $\mathfrak{g}_\kappa$ je nekomutativni prostor tipa Liejeve algebre definiran komutacijiskim relacijama:

$$[X_\mu, X_\nu] = i(a_\mu X_\nu - a_\nu X_\mu), \quad a_\mu \in \mathbb{R}, 1 \leq \mu, \nu \leq n. \tag{4.1}$$

Iz prethodnog slijedi da su strukturne konstante od $\mathfrak{g}_\kappa$ dane sa:

$$C_{\mu\nu\lambda} = ia_\mu \delta_{\nu\mu} - ia_\nu \delta_{\mu\lambda}. \tag{4.2}$$

Liejeva algebra $\mathfrak{g}_\kappa$ predstavlja deformaciju Euklidskog prostora ukoliko je deformacijski vektor $a \in \mathbb{R}^n$ ili deformaciju prostora Minkowskog ukoliko je $a \in \mathbb{R}^n_1$, gdje je $\mathbb{R}^n_1$ n-dimenzionalni prostor Minkowskog čija s metrikom $\eta_{\mu\nu} = diag(-1, 1, \ldots, 1)$. Povijesno gledano, κ-Minkowski prostor je jedan od prvih primjera nekomutativnog prostora tipa Liejeve algebre [7] i ima važnu primjenu u specijalnoj teoriji relativnosti, nekomutativnoj teoriji polja, te kao jedan od pristupa u proučavanju kvantne gravitacije. Realizacije κ-deformiranog prostora proučane su u radovima [10, 13, 16, 18, 12, 19].

4.2 Linearna realizacija

Pokažimo da postoji realizacija algebre (4.1) koja je linearna u diferencijalnim operatorima $\partial_1, \partial_2, \ldots, \partial_n$. Neka je realizacija od (4.1) oblika $\hat{x}_\mu = \sum_{\alpha=1}^n x_\alpha \varphi_{\alpha\mu}$, gdje je

$$\varphi_{\alpha\mu} = \delta_{\alpha\mu} + \sum_{\beta=1}^{n} K_{\alpha\mu\beta}\partial_\beta. \tag{4.3}$$

Želimo odrediti koeficijente $K_{\alpha\mu\beta}$ tako da vrijedi relacija (3.12), gdje su strukturne konstante $C_{\mu\nu\lambda}$ dane sa (4.2). Uvrštavajući jednadžbu (4.3) u sustav (3.12) dobijemo da je

$$K_{\lambda\mu\nu} - K_{\lambda\nu\mu} + \sum_{\alpha=1}^{n}\sum_{\beta=1}^{n}(K_{\lambda\mu\alpha}K_{\alpha\nu\beta} - K_{\lambda\nu\alpha}K_{\alpha\mu\beta})\partial_\beta \tag{4.4}$$

$$= C_{\mu\nu\lambda} + \sum_{\alpha=1}^{n}\sum_{\beta=1}^{n} C_{\mu\nu\alpha}K_{\lambda\alpha\beta}\partial_\beta. \tag{4.5}$$

Prethodni izraz implicira da koeficijenti $K_{\mu\nu\lambda}$ zadovoljavaju sljedeći sustav nelinearnih diferencijalnih jednadžbi:

$$K_{\lambda\mu\nu} - K_{\lambda\nu\mu} = C_{\mu\nu\lambda}, \tag{4.6}$$

$$\sum_{\alpha=1}^{n}(K_{\lambda\mu\alpha}K_{\alpha\nu\beta} - K_{\lambda\nu\alpha}K_{\alpha\mu\beta}) = \sum_{\alpha=1}^{n} C_{\mu\nu\alpha}K_{\lambda\alpha\beta} \tag{4.7}$$

S obzirom da za strukturne konstante $C_{\mu\nu\lambda}$ vrijedi relacija (4.2) tada iz (4.6) slijedi da je

$$K_{\lambda\mu\nu} - K_{\lambda\nu\mu} = ia_\mu\delta_{\nu\lambda} - ia_\nu\delta_{\mu\lambda}. \tag{4.8}$$

Prethodno nam sugerira da definiramo

$$K_{\lambda\mu\nu} = ia_\mu \delta_{\mu\lambda}. \tag{4.9}$$

Za ovaj izbor koeficijenta $K_{\lambda\mu\nu}$ obje strane jednadžbe (4.7) išćezavaju pa je stoga jedno od rješenja sustava (4.6)-(4.7) dano sa (4.9). Dakle, linearna realizacija κ-deformiranog Euklidskog prostora je oblika:

$$\hat{x}_\mu = x_\mu + ia_\mu \sum_{\alpha=1}^{n} x_\alpha \partial_\alpha, \tag{4.10}$$

gdje je funkcija $\varphi_{\alpha\mu}$ dana sa $\varphi_{\alpha\mu} = \delta_{\alpha\mu} + ia_\mu \partial_\alpha$. Primjetimo da vrijedi $\lim_{\|a\|\to 0} \hat{x}_\mu = x_\mu$.

4.3 Weylova simetrična realizacija

Iz (4.2) slijedi da su matrični elementi matrice diferencijalnih operatora $\mathbf{C}$ (3.59) jednaki

$$C_{\mu\nu} = \sum_{\alpha=1}^{n} C_{\mu\alpha\nu} \partial_\alpha = ia_\mu \partial_\nu - \left(i \sum_{\alpha=1}^{n} a_\alpha \partial_\alpha \right) \delta_{\mu\nu}. \tag{4.11}$$

Ako definiramo vektore retke $a = (a_1, \ldots, a_n)$ i $\partial = (\partial_1, \ldots, \partial_n)$, tada matricu diferencijalnih operatora $\mathbf{C}$ možemo zapisati kao

$$\mathbf{C} = ia \otimes \partial - (ia \cdot \partial) I, \tag{4.12}$$

gdje je I $n \times n$ jedinična matrica i $a \cdot \partial = \sum_{\alpha=1}^{n} a_\alpha \partial_\alpha$. Indukcijom po k se lako pokaže da je

$$\mathbf{C}^k = (-1)^{k-1} A^{k-1} (ia \otimes \partial) + (-1)^k A^k I, \quad k \geq 1, \tag{4.13}$$

gdje je A diferencijalni operator $A = ia \cdot \partial$. Neka je ψ funkcija izvodnica za Bernoullijeve brojeve (3.58). Tada je

$$\begin{aligned}
\psi(\mathbf{C}) &= I + \sum_{k=1}^{\infty} B_k \frac{(-1)^k}{k!} \mathbf{C}^k \\
&= I + \sum_{k=1}^{\infty} B_k \frac{(-1)^k}{k!} \left[(-1)^{k-1} A^{k-1} (ia \otimes \partial) + (-1)^k A^k I\right] \\
&= \left(\sum_{k=1}^{\infty} B_k \frac{(-1)^k}{k!} A^k\right) I - \left(\sum_{k=1}^{\infty} B_k \frac{(-1)^k}{k!} A^{k-1}\right) (ia \otimes \partial) \\
&= \frac{A}{e^A - 1} I - \frac{1}{A} \left(\frac{A}{e^A - 1} - 1\right) (ia \otimes \partial).
\end{aligned} \tag{4.14}$$

Iz prethodnog slijedi da su matrični koeficijenti $\psi_{\mu\alpha}(\mathbf{C})$ dani sa

$$\psi_{\mu\alpha}(\mathbf{C}) = \frac{A}{e^A - 1} \delta_{\mu\alpha} + \left(\frac{1}{A} - \frac{1}{e^A - 1}\right) ia_\mu \partial_\alpha. \tag{4.15}$$

Stoga je Weylova simetrična realizacija κ-deformiranog Euklidskog prostora oblika

$$\hat{x}_\mu = \sum_{\alpha=1}^{n} x_\alpha \psi_{\mu\alpha}(\mathbf{C}) = x_\mu \frac{A}{e^A - 1} + ia_\mu (x \cdot \partial) \left(\frac{1}{A} - \frac{1}{e^A - 1}\right). \tag{4.16}$$

Također, možemo odrediti i Weylovu simetričnu realizaciju proširenja Liejeve algebre g_κ sa operatorima $T_{\mu\nu}$ i $T_{\mu\nu}^{-1}$. Navedeno proširenje ćemo označiti sa H_κ. Vrijedi da je

$$\begin{aligned}
e^{\mathbf{C}} &= I + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \mathbf{C}^k \\
&= I + \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k!} A^{k-1}\right) (ia \otimes \partial) + \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} A^k\right) I \\
&= I + \frac{1 - e^A}{A} (ia \otimes \partial) + (e^{-A} - 1) I \\
&= e^{-A} I + \frac{1 - e^{-A}}{A} (ia \otimes \partial).
\end{aligned} \tag{4.17}$$

Prethodno implicira da je

$$\hat{T}_{\mu\nu} = (e^{\mathbf{C}})_{\mu\nu} = e^{-A} \delta_{\mu\nu} - ia_\mu \partial_\nu \frac{e^{-A} - 1}{A}. \tag{4.18}$$

Slično se pokaže da vrijedi

$$\hat{T}^{-1}_{\mu\nu} = (e^{-\mathbf{C}})_{\mu\nu} = e^{A}\delta_{\mu\nu} - ia_\mu \partial_\nu \frac{e^A - 1}{A}. \tag{4.19}$$

Izrazi (4.16), (4.18) i (4.19) nam daju realizaciju asocijativne algebre H_κ u kojoj je sadržana algebra $U(\mathfrak{g}_\kappa)$. Iz teorema (3.3) slijedi da je dualna realizacija za simetričnu realizaciju (4.16) dana sa

$$\hat{y}_\mu = \sum_{\alpha=1}^{n} x_\alpha \tilde{\psi}_{\mu\alpha}(\mathbf{C}) = x_\mu \frac{A}{1-e^{-A}} + ia_\mu (x\cdot\partial)\left(\frac{1}{A} - \frac{1}{1-e^{-A}}\right). \tag{4.20}$$

4.4 Simetrična i linearna realizacija κ-deformiranog prostora kao poseban slučaj familije realizacija

U radu [18] je konstruirana familija realizacija κ-deformiranog prostora oblika

$$\hat{x}_\mu = x_\mu \varphi + i(a\cdot x)(\partial_\mu \beta_1 + ia_\mu \partial^2 \beta_2) + i(x\cdot\partial)(a_\mu \gamma_1 + ia^2 \partial_\mu \gamma_2), \tag{4.21}$$

gdje su φ, β_i i γ_i funkcije od $A = ia\cdot\partial$ i $B = a^2\cdot\partial^2$. Za granične uvjete se zahtjeva da vrijedi $\varphi(0) = 1$ te da su $\beta_i(0)$ i $\gamma_i(0)$ konačni tako da $\hat{x}_\mu \to x_\mu$ kada $a \to 0$. Posebno su promatrane realizacije u slučajevima kada je $\beta_1 = \beta_2 = 0$ i $\beta_1 = 1$ i $\beta_2 = 0$. U prvom slučaju dobijena je realizacija tipa I

$$\hat{x}_\mu = x_\mu \varphi + +i(x\cdot\partial)(a_\mu + ia^2 \partial_\mu \gamma_2), \tag{4.22}$$

gdje iz (4.1) slijedi da su za zadanu funkciju φ funkcije γ_1 i γ_2 dane sa

$$\gamma_1 = \frac{\left(1 + \frac{\partial\varphi}{\partial A}\right) + \varphi}{\varphi - \left(A\frac{\partial\varphi}{\partial A} + 2B\frac{\partial\varphi}{\partial B}\right)}, \tag{4.23}$$

$$\gamma_2 = -\frac{2\frac{\partial\varphi}{\partial B}}{\varphi - \left(A\frac{\partial\varphi}{\partial A} + 2B\frac{\partial\varphi}{\partial B}\right)}. \tag{4.24}$$

U slučaju $\beta_1 = 1$ i $\beta_2 = 0$ dobijena je realizacija tipa II

$$\hat{x}_\mu = x_\mu \varphi + i(a \cdot x)\partial_\mu + i(a \cdot \partial)(a_\mu + ia^2 \partial_\mu \gamma_2), \tag{4.25}$$

gdje iz (4.1) slijede uvjeti

$$\gamma_1 = \frac{\left(1 + \frac{\partial \varphi}{\partial A}\right) + \varphi}{\varphi - \left(A\frac{\partial \varphi}{\partial A} + 2B\frac{\partial \varphi}{\partial B}\right)}, \tag{4.26}$$

$$\gamma_2 = \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial A} - 2(\varphi + A)\frac{\partial \varphi}{\partial B}}{\varphi - \left(A\frac{\partial \varphi}{\partial A} + 2B\frac{\partial \varphi}{\partial B}\right)}. \tag{4.27}$$

Za poseban izbor funkcija φ možemo dobiti neke klase jednostavih realizacija tipa I:

Lijeva realizacija:

$$\varphi_{\mu\nu} = (1 - A)\delta_{\mu\nu}, \quad \varphi = 1 - A, \tag{4.28}$$

Desna (linearna) realizacija:

$$\varphi_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu} + ia_\nu \partial_\mu, \quad \varphi = 1, \tag{4.29}$$

Simetrična realizacija:

$$\varphi_{\mu\nu} = \frac{A}{e^A - 1}\delta_{\mu\nu} + ia_\nu \partial_\nu \frac{e^A - A - 1}{(e^A - 1)A}, \quad \varphi = \frac{A}{e^A - 1}. \tag{4.30}$$

U slučaju realizacije tipa II konstrirana je prirodna realizacija:

$$\varphi_{\mu\nu} = (-A + \sqrt{1 - B})\delta_{\mu\nu} + ia_\mu \partial_\nu, \tag{4.31}$$

gdje je

$$\varphi = -A + \sqrt{1 - B}. \tag{4.32}$$

Poglavlje 5

Diferencijalni račun na nekomutativnim prostorima

5.1 Uvod

Diferencijalni račun na asocijativnim algebrama je vrlo važan za razvoj teorijske fizike. Landi je u radu [5] dao konstrukciju diferencijalne algebre formi za opću asocijativnu algebru. Konstrukcije diferencijalnog računa na nekomutativnim prostorima tipa Liejeve algebre dane su u radovima [5, 11, 13, 14, 15, 16, 21]. Posebno, konstrukcija diferencijalnog računa na κ-deformiranom prostoru je proučavana u radovima [13, 16, 11, 12]. U konstrukciji diferencijalnog računa na nekomutativnim prostorima koristi se pristup preko Hopfovih algebri (kvantne grupe) i pristup metodom realizacija uvedenim u prethodnim poglavljima. Metoda realizacija se zasniva na deformacijama standardnog diferencijalnog računa na Euklidskom prostoru ili prostoru Minkowskog. U radu [13] konstrukcija diferencijalnih formi i vanjske derivacije na κ-deformiranom prostoru dobijena je koristeći realizacije nekomutativnih koordinata koje su opisane u trećem poglavlju. Vanjska derivacija d i jedan-forme ξ_μ na κ-prostoru su definirane kao formalni redovi u Liejevoj superalgebri generiranoj komutativnim koordinatama x_μ, derivacijama ∂_μ i jedan-formama dx_μ. Na taj način dobiven je klasični nekomutativni diferencijalni račun s obzirom da je broj jedan-formi ξ_μ jednak broju nekomutativnih koordinata. Definirane su forme višeg reda te je pokazano da je vanjska derivacija nilpotentni operator koji zadovoljava graduirano Leibnizovo pravilo. Realizacije vanjske derivacije i jedan formi su povezane s realizacijama nekomutativnih koordinata preko sistema parcijalnih diferencijalnih jednadžbi. Pokazano je da za danu realizaciju nekomutativnih koordinata postoji beskonačna familija realizacija derivacija i jedan-formi. Kao pristup konstrukciji diferencijalnog računa uz metodu realizacija koristi se i konstrukcija bikovarijantnog diferencijalnog računa na Hopfovim algebrama [23]. Najvažnije rezultate na ovu temu je dao Woronowicz u radu [14] gdje se proučava konstrukcija bikovarijantnog diferencijalnog računa na kompaktnim matričnim pseudogrupama (kvantne grupe). Zahtjev da diferencijalni račun bude bikovarijantan i kovarijantan s obzirom na očekivanu grupu simetrija dovodi do određenih problema. Prvi rad u kojem se promatrao spomenuti problem je [11] u kojem je Sitarz proučavao konstrukciju bikovarijantnog diferencijalnog računa na četverodimenzionalnom κ-deformiranom prostoru Minkowskog. Pokazano je da ne postoji četverodimenzionalni bikovarijantni diferencijalni račun koji je i kovarijantan s obzirom na djelovanje Lorentzove algebre jer dolazi do kontradikcije s Jacobijevim identitetom za generatore diferencijalne algebre. Konstruirana je diferencijalna algebra koja ima pet jedan-formi od kojih jedna nema klasičnu interpretaciju. Gonera je generalizirao ovu konstrukciju na n-dimenzionalni prostor [15].

5.2 Diferencijalni račun na algebrama

U ovom dijelu ćemo navesti osnovne definicije i pojmove vezane za konstrukciju diferencijalnog računa na unitalnim asocijativnim algebrama. U daljnjem tekstu ćemo pod pojmom algebra podrazumijevamo unitalna asocijativna algebra.

Definicija 5.1 *Neka je X algebra nad poljem $\mathbb{K}$. Diferencijalni račun prvog reda na X je X-bimodul Γ s linearnim preslikavanjem $d\colon X \to \Gamma$ takvim da vrijedi:*

1. *d zadovoljava Leibnizovo pravilo tj.*
   $d(xy) = dx \cdot y + x \cdot dy, \ \forall\, x, y \in X,$

2. $\Gamma = span\{x \cdot dy \cdot z \mid x, y, z \in X\}$.
   Uređeni par (Γ, d) se zove diferencijalni račun prvog reda na X.

Definicija 5.2 *Dva diferencijalna računa (Γ_1, d_1) i (Γ_2, d_2) na X su ekvivalentna ako postoji bijektivno preslikavanje $\varphi\colon \Gamma_1 \to \Gamma_2$ takvo da je*
$\varphi(x \cdot dy_1 \cdot z) = x \cdot dy_2 \cdot z, \quad \forall\, x, y, z \in X.$

Primjer 5.1 ***Kanonski primjer***

Neka je A algebra s množenjem $m\colon A \otimes A \to A$ u oznaci $m(a \otimes b) = ab, \ \forall\, a, b \in A$.

Na $\ker(m)$ *možemo definirati strukturu A-bimodula sa:*

$$c\left(\sum_{k=1}^{n} a_k \otimes b_k\right) = \sum_{k=1}^{n} ca_k \otimes b_k, \tag{5.1}$$

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k \otimes b_k\right) c = \sum_{k=1}^{n} a_k \otimes b_k c, \quad \forall\, c \in A. \tag{5.2}$$

Sada definirajmo linearno preslikavanje $d\colon A \to \ker m$ sa

$$d(b) = 1 \otimes b - b \otimes 1, \quad \forall\, b \in A. \tag{5.3}$$

Lako se vidi da je $(\ker(m), d)$ diferencijalni račun prvog reda na A.

Primjer 5.2 ***Diferencijalni račun prvog reda na algebri polinoma***

Neka je $X = \mathbb{C}[x]$ algebra polinoma i neka je Γ slobodni desni X-modul s bazom $\{dx\}$,

$$\Gamma = span\{dx \cdot f(x) \mid f(x) \in \mathbb{C}[X]\}. \tag{5.4}$$

Odaberimo polinom $p(x) \in \mathbb{C}[x]$ i definirajmo

$$x \cdot dx = dx \cdot p(x). \tag{5.5}$$

Relacija (5.5) *implicira da je*

$$f(x) \cdot dx = dx \cdot f(p(x)), \quad \forall\, f \in \mathbb{C}[x]. \tag{5.6}$$

Sada imamo jedinstvenu strukturu X- bimodula na Γ koju ćemo označiti s Γ_p. Želimo definirati preslikavanje d tako da (Γ_p, d) bude diferencijalni račun prvog reda na X. To znači da moramo definirati linearno preslikavanje $d\colon X \to \Gamma$ koje zadovoljava Leibnizovo pravilo. Da bi to vrijedilo, definirat ćemo d sa

$$d(x^n) = \sum_{i+j=n-1} x^i \cdot dx \cdot x^j, \quad n \geq 2. \tag{5.7}$$

i linearno proširiti na X. Tada za $f(x) = \sum_{n=0}^{k} \alpha_n x^n \in \mathbb{C}[x]$ imamo da je

$$d(f(x)) = \sum_{n=0}^{k} \sum_{i+j=n-1} \alpha_n x^i \cdot dx \cdot x^j. \tag{5.8}$$

Definicija 5.3 *Diferencijalni račun višeg reda nad algebrom X je graduirana algebra $\Gamma^{\wedge} = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \Gamma^{\wedge n}$ (umnožak $\wedge$ u $\Gamma^{\wedge}$ je preslikavanje sa $\Gamma^{\wedge n} \times \Gamma^{\wedge m}$ u $\Gamma^{\wedge (n+m)}$) s linearnim preslikavanjem $d\colon \Gamma^{\wedge} \to \Gamma^{\wedge}$ prvog stupnja, tj. $d\colon \Gamma^{\wedge n} \to \Gamma^{\wedge (n+1)}$ takvim da vrijedi:*

1. $d^2 = 0$
2. $d(\rho \wedge \zeta) = d\rho \wedge \zeta + (-1)^n \rho \wedge d\zeta, \quad \forall\, \rho \in \Gamma^{\wedge n}, \quad \forall\, \zeta \in \Gamma^{\wedge},$
3. $\Gamma^{\wedge 0} = X$ *i* $\Gamma^{\wedge n} = span\{x_0 \wedge dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n \mid x_0, x_1, \cdots, x_n \in X\},\ n \in \mathbb{N}.$

Uvjet (2) se naziva graduirano Leibnizovo pravilo.
Indukcijom po n možemo pokazati da se uvjet (3) može zamijeniti uvjetom:
$\Gamma^{\wedge 0} = X$ i $\Gamma^{\wedge n} = X \cdot d\Gamma^{\wedge (n-1)}$, $n \in \mathbb{N}$. Koristeći uvjete definicije (1) i (2) lako se pokaže da u svakom diferecijalnom računu nad X vrijede identiteti:

1. $d(x_0 \wedge dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n) = dx_0 \wedge dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$,

2. $(x_0 \wedge dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n) \wedge (x_{n+1} \wedge dx_{n+2} \wedge \cdots \wedge dx_{n+k})$

   $= (-1)^n x_0 x_1 dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_{n+k} + \sum_{r=1}^{n} (-1)^{n-r} x_0 dx_1 \wedge \cdots \wedge d(x_r x_{r+1}) \cdots \wedge dx_{n+k}$.

5.3 Kovarijantni i bikovarijantni diferencijalni račun na kvantnim prostorima

Sada ćemo uvesti osnovne pojmove vezane za kovarijantnost i bikovarijantnost diferencijalnog računa na kvantnim prostorima.

Definicija 5.4 ***Koalgebra***
Koalgebra je vektorski prostor A nad poljem $\mathbb{K}$ s linearnim preslikavanjima

$$\Delta \colon A \to A \otimes A \quad i \quad \epsilon \colon A \to \mathbb{K} \tag{5.9}$$

takvima da vrijedi

$$(\Delta \otimes id) \circ \Delta = (id \otimes \Delta) \circ \Delta \quad (koasocijativnost), \tag{5.10}$$

$$(\epsilon \otimes id) \circ \Delta = (id \otimes \epsilon) \circ \Delta = id \quad (kojedinica). \tag{5.11}$$

Koristeći Sweedlerovu oznaku za koprodukt

$$\Delta(a) = \sum a_{(1)} \otimes a_{(2)}, \quad a \in A, \tag{5.12}$$

uvjete (5.10) i (5.11) možemo zapisati kao

$$\sum (a_{(1)})_{(1)} \otimes (a_{(1)})_{(2)} \otimes a_{(2)} = \sum a_{(1)} \otimes (a_{(2)})_{(1)} \otimes (a_{(2)})_{(2)} \tag{5.13}$$

i

$$\sum \epsilon(a_{(1)}) \otimes a_{(2)} = \sum a_{(1)} \otimes \epsilon(a_{(2)}) = a. \tag{5.14}$$

Definicija 5.5 ***Koreprezentacija***

Neka je A koalgebra i neka je V vektorski prostor nad poljem $\mathbb{K}$. Desna koreprezentacija od A na V je linearno preslikavanje

$$\varphi\colon V \to V \otimes A \tag{5.15}$$

takvo da vrijedi

$$(\varphi \otimes id) \circ \varphi = (id \otimes \Delta) \circ \varphi, \tag{5.16}$$

$$(id \otimes \epsilon) \circ \varphi = id. \tag{5.17}$$

Vektorski prostor V zajedno s linernim preslikavanjem φ naziva se desni A-komodul.

Slično možemo definirati lijevu koreprezentaciju kao linearno preslikavanje $\varphi\colon V \to A \times V$ koje zadovoljava analogne uvjete. Ako stavimo da je $V = A$ i $\varphi = \Delta$, tada je $\Delta\colon A \to A \otimes A$ lijeva i desna koreprezentacija jer su uvjeti (5.16) i (5.17) ekvivalentni s uvjetima koprodukta u koalgebri A.

Definicija 5.6 ***Kvantni prostor***

Neka je X algebra i neka je A bialgebra. Kažemo da je X desna A-komodulna aglebra ili desni kvantni prostor ako vrijedi:

1. *X je desni A-komodul,*
2. *desna koreprezentacija $\varphi\colon X \to X \otimes A$ je homomorfizam algebri, tj. $\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$ i $\varphi(1) = 1 \otimes 1$, gdje je množenje u $X \otimes A$ dano sa $(a_1 \otimes b_1)(a_2 \otimes b_2) = (a_1a_2) \otimes (b_1b_2)$.*

Slično definiramo i lijevi kvantni prostor.

Neka je $X = A$ i $\varphi = \Delta$. Tada je desna (i lijeva) koreprezentacija $\varphi\colon X \to X \otimes X$ homomorfizam algebri i $\Delta(1) = 1 \otimes 1$ pa je X desni (i lijevi) kvantni prostor nad samim sobom.

U daljnjem tekstu ćemo sa X označiti lijevi kvantni prostor za Hopfovu algebru A.

Definicija 5.7 ***Kovarijantni diferencijalni račun prvog reda na kvantnom prostoru***
Diferencijalni račun prvog reda Γ *nad lijevim kvantnim prostorom* X *s koreprezentacijom* $\varphi\colon X \to A \otimes X$ *je lijevo kovarijantan ako postoji lijeva koreprezentacija* $\psi\colon \Gamma \to A \otimes \Gamma$ *od* A *na* Γ *tako da vrijedi:*

1. $\psi(x\rho y) = \varphi(x)\psi(\rho)\varphi(y), \quad \forall\, x, y \in X, \quad \forall\, \rho \in \Gamma,$

2. $\psi(dx) = (id \otimes d) \circ \varphi(x), \quad \forall\, x \in X.$

Uvjeti (1) i (2) povlače da je lijeva koreprezentacija ψ od A na Γ kompatibilna s koreprezentacijom φ od A na X te impliciraju da vrijedi

$$\psi(xdy) = \varphi(x)(id \otimes d)\varphi(y). \tag{5.18}$$

Drugi nam uvjet govori i da A djeluje na Γ na isti način kao što djeluje na X. S obzirom da svaki $\rho \in \Gamma$ možemo zapisati kao $\rho = \sum_{i=1}^{n} x_i dy_i$, ψ je potpuno definiran koreprezentacijom $\varphi\colon X \to A \otimes X$ i diferencijalom $d\colon X \to \Gamma$.

Definicija 5.8 *Diferencijalni račun višeg reda* $\Gamma^\wedge$ *nad lijevim kvantnim prostorom* X *je lijevo kovarijantan s obzirom na* A *ako postoji homomorfizam algebri* $\phi^\wedge\colon \Gamma^\wedge \to A \otimes \Gamma^\wedge$ *koji je lijeva koreprezentacija od* A *na* $\Gamma^\wedge$ *takva da je*

$$\phi^\wedge(x) = \varphi(x), \quad \forall\, x \in \Gamma^{\wedge 0} = X \quad i \quad \phi^\wedge(d\rho) = (id \otimes d)\phi^\wedge(\rho),\ \forall \rho \in \Gamma^\wedge.$$

Kažemo da je diferencijalni račun Γ bikovarijantan ako je lijevo i desno kovarijantan u odnosu na koprodukt $\Delta\colon A \to A \otimes A$.

Primjer 5.3 ***Diferencijalni račun na simetričnoj algebri***
Neka je X *simetrična algebra generirana elementima* $x_1, x_2, \ldots, x_n$*. Želimo definirati diferencijalni račun višeg reda na algebri* Γ *generiranoj s* $x_i, dx_i, i = 1, 2, \ldots, n$ *za koje*

vrijede relacije:

$$x_i x_j = x_j x_i, \tag{5.19}$$

$$x_i dx_j = dx_j x_i, \tag{5.20}$$

$$dx_i dx_j = -dx_j dx_i. \tag{5.21}$$

Koristit ćemo oznaku $dx_i dx_j = dx_i \wedge dx_j$*, gdje* $\wedge$ *označava standardni vanjski umnožak formi. Algebra* Γ *je direktna suma potprostora* $\Gamma = \bigoplus_{k=0}^{n} \Gamma^k$ *gdje je*

1. $\Gamma^0 = X$,

2. $\Gamma^k = span\{y dx_{i1} \wedge \cdots \wedge dx_{ik} \mid y \in X, 1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n\}$.

Želimo definirati linearno preslikavanje $d\colon \Gamma \to \Gamma$ *tako da vrijedi:*

1. $d\colon \Gamma^k \to \Gamma^{(k+1)}$,

2. $d^2 = 0$,

3. $d(\omega \wedge \eta) = d\omega \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge d\eta, \quad \forall\, \omega \in \Gamma^k, \quad \forall\, \eta \in \Gamma$.

Prvo definiramo $d\colon X \to \Gamma^1$ *sa*

$$d(x_i) = dx_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{5.22}$$

$$d(xy) = d(x)y + xd(y), \quad \forall\, x, y \in X. \tag{5.23}$$

Zatim definiramo $d\colon \Gamma^k \to \Gamma^{(k+1)}$ *sa*

$$d(y dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_k) = dy \wedge dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_k. \tag{5.24}$$

Lako se provjeri da za ovako definirani d *vrijede svojstva (1)-(3) pa je* (Γ, d) *diferencijalni račun višeg reda na* X*. Na* X *je definirana standardna struktura bialgebre sa*

$$\Delta(x_k) = 1 \otimes x_k + x_k \otimes 1, \quad \varepsilon(x_k) = 0. \tag{5.25}$$

Očigledno je $\Delta\colon X \to X \otimes X$ *lijeva i desna koreprezentacija. Sada želimo definirati linearno preslikavanje* $\Delta_L\colon \Gamma \to X \otimes \Gamma$ *koje zadovoljava sljedeća svojstva:*

1. Δ_L *je homomorfizam algebri,* $\Delta_L |_{\Gamma^0} = \Delta$,

2. Δ_L *je lijeva koreprezentacija,*

3. $\Delta_L(d\rho) = (id \otimes d)\Delta_L(\rho), \quad \forall\, \rho \in \Gamma.$

Ako definiramo $\Delta_L \colon \Gamma \to X \otimes \Gamma$ *sa*

$$\Delta_L(ydx_{i1} \wedge \cdots \wedge dx_{ik}) = \Delta(y)(1 \otimes dx_{i1} \wedge \cdots \wedge dx_{ik}), \tag{5.26}$$

onda se lako pokaže da vrijede svojstva (1)-(3), stoga je (Γ, d) *lijevo kovarijantni diferencijalni račun višeg reda na* X.

5.4 Liejeve superalgebre

U ovom dijelu ćemo navesti osnovne definicije vezane uz Liejeve superalgebre koje proučavamo u kontekstu konstrukcije diferencijalnog računa na nekomutativnim prostorima. U daljnjem tekstu ćemo podrazumijevati da su svi vektorski prostori i Liejeve algebre nad poljem $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Definicija 5.9 *Liejeva superalgebra je* $\mathbb{Z}_2$ *graduirani vektorski prostor* $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$ *zajedno sa bilinearnim preslikavanjem* $[,] \colon \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ *takvim da vrijedi:*

1. $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta] \subset \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{Z}_2$ *($\mathbb{Z}_2$-gradacija),*

2. $[a, b] = -(-1)^{|a||b|}[b, a]$ *(graduirana antismetričnost).*

3. $(-1)^{|a||c|}[a, [b, c]] + (-1)^{|a||b|}[b, [c, a]] + (-1)^{|b||c|}[c, [a, b]] = 0$, $\forall a, b, c \in \mathfrak{g}$, *(graduirani Jacobijev identitet).*

Umnožak $[,]$ nazivamo Liejev superkomutator. Stupanj homogenog elementa $a \in \mathfrak{g}_i$ označavamo sa $|a|$ i definiramo sa $|a| = 0$ ako je $a \in g_0$ (parni elementi) i $|a| = 1$

ako je $a \in g_1$ (neparni elementi). Stupanj elementa $[a, b]$ je suma stupnjeva od a i b modulo 2. Parni dio $\mathfrak{g}_0$ Liejeve superalgebre je Liejeva algebra, a ukoliko je $\mathfrak{g}_0 = 0$, tj. ako $\mathfrak{g}$ sadrži samo neparni dio, tada je $\mathfrak{g}$ Abelova.

Primjer 5.4 *Za svaku asocijativnu superalgebru $A = A_0 \oplus A_1$ možemo definirati superkomutator za homogene elemente iz A sa:*

$$[x, y] = xy - (-1)^{|x||y|} yx \tag{5.27}$$

i linearno ga poširiti na sve elemente iz A. Algebra A je sada zajedno sa tako definiranim superkomutatorom Liejeva superalgebra.

Definicija 5.10 *Neka je A $\mathbb{Z}_2$ graduirana algebra nad poljem $\mathbb{C}$. Linearno preslikavanje $D\colon A \to A$ stupnja $\alpha \in \mathbb{N}_0$ za koje vrijedi*

$$D(ab) = D(a)b + (-1)^{\alpha|a|} D(a)b, \ \forall a, b \in A. \tag{5.28}$$

nazivano lijevom superderivacijom. Slično, D nazivamo desnom superderivacijom stupnja α ako vrijedi

$$D(ab) = aD(b) + (-1)^{\alpha|b|} aD(b), \ \forall a, b \in A. \tag{5.29}$$

Vrijede sljedeća pravila za računanje superkomutatora:

$$[x, yz] = [x, y]z + (-1)^{|x||y|} y[x, z], \tag{5.30}$$

$$[yz, x] = y[z, x] + (-1)^{|x||z|} [y, x]z, \ \forall x, y, z \in \mathfrak{g}. \tag{5.31}$$

Definicija 5.11 *Neka je $\mathfrak{g}$ Liejeva superalgebra nad poljem $\mathbb{C}$ i neka je U unitalna asocijativna $\mathbb{C}$-algebra. Tada je U zajedno sa linearnim preslikavanjem $\sigma\colon \mathfrak{g} \to U$ univerzalna omotačka algebra od $\mathfrak{g}$ ako vrijedi:*

1.

$$\sigma([x,y]) = \sigma(x)\sigma(y) - (-1)^{ab}\sigma(y)\sigma(x),\ x \in \mathfrak{g}_a,\ y \in \mathfrak{g}_b\ (a,b = 0,1). \tag{5.32}$$

2. Za svaku unitalnu associjativnu $\mathbb{C}$*-algebru* U' *i* $\mathbb{C}$*-linearno preslikavanje* $\sigma' \colon \mathfrak{g} \to U'$ *za koje vrijedi* (5.32)*, postoji jedinstveni homomorfizam algebri* $\varphi \colon U \to U'$ *takav da je* $\varphi \circ \sigma = \sigma'$*.*

Omotačku algebru možemo konstruirati na sljedeći način. Neka je $T(\mathfrak{g})$ tenzorska algebra od $\mathfrak{g}$ i neka je I dvostrani ideal generiran elementima

$$\{x \otimes y - (-1)^{ab} y \otimes x - [x,y],\ x \in \mathfrak{g}_a,\ y \in \mathfrak{g}_b \quad (a,b = 0,1)\}. \tag{5.33}$$

Označimo sa $U(\mathfrak{g})$ kvocijentnu algebru $T(\mathfrak{g})/I$. Neka je $\sigma \colon \mathfrak{g} \to U(\mathfrak{g})$ restrikcija na $\mathfrak{g}$ kvocijentnog epimorfizma $\pi \colon T(\mathfrak{g}) \to U(\mathfrak{g})$. Tada je $(U(\mathfrak{g}), \sigma)$ univerzalna omotačka algebra za Liejevu superalgebru $\mathfrak{g}$. Sljedeći teorem je generalizacija PBW-teorema za univerzalnu omotačku algebru Liejeve algebre $\mathfrak{g}$.

Teorem 5.1 *Neka je* $\{x_1, \ldots, x_s\}$ *uređena baza za* $\mathfrak{g}$ *koja se sastoji od homogenih elemenata. Tada je skup svih elemenata oblika* $\{x_1^{p_1} \cdots x_s^{p_s} \mid p_i \geq 0$ *i* $p_i = 0,1$ *za neparne elemente* $x_i,\ x_i^0 = 1\}$ *baza za* $U(\mathfrak{g})$*.*

Sada ćemo konstruirati Liejevu superalgebru $\mathfrak{g}$ koju ćemo dobiti proširenjem Liejeve algebre $\mathfrak{g}_0$ sa jedan-formama. Neka je $\mathfrak{g}_0 = span\{X_1, \ldots, X_n\}$ i neka je $\mathfrak{g}_1 = span\{\xi_1, \ldots, \xi_m\}$. Elemente baze od $\mathfrak{g}_0$ interpretiramo kao koordinate na nekomutativnom prostoru $U(\mathfrak{g}_0)$, a elemente baze od $\mathfrak{g}_1$ kao jedan forme. Liejeva superalgebra $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$ nad poljem $\mathbb{C}$ je definirana na sljedeći način:

$$[X_\mu, X_\nu] = \sum_{\alpha=1}^{n} C_{\mu\nu\alpha} X_\alpha, \tag{5.34}$$

$$[\xi_\mu, \xi_\nu] = 0, \tag{5.35}$$

$$[\xi_\mu, X_\nu] = \sum_{\alpha=1}^{m} K_{\mu\nu\alpha} \xi_\alpha. \tag{5.36}$$

Strukturne konstante $C_{\mu\nu\alpha}$ i $K_{\mu\nu\alpha}$ zadovoljavaju Jacobijeve identitete:

$$\sum_{\rho=1}^{n} (C_{\mu\alpha\rho} C_{\rho\beta\nu} + C_{\alpha\beta\rho} C_{\rho\mu\nu} + C_{\beta\mu\rho} C_{\rho\alpha\nu}) = 0, \tag{5.37}$$

$$\sum_{\alpha=1}^{m} K_{\lambda\nu\alpha} K_{\alpha\nu\beta} - \sum_{\alpha=1}^{m} K_{\lambda\mu\alpha} K_{\alpha\nu\beta} + \sum_{\alpha=1}^{n} C_{\mu\nu\alpha} K_{\lambda\alpha\beta} = 0. \tag{5.38}$$

Bazu od $\mathfrak{g}$ možemo označiti sa $\{Z_1, \ldots, Z_{n+m}\}$ gdje je $Z_i = X_i,\ i = 1, \ldots, n$ i $Z_{i+n} = \xi_i,\ i = 1, \ldots, m$. Stupanj elementa Z_i definiran je sa:

$$|Z_i| = \begin{cases} 0, & 1 \leq i \leq n \\ 1, & n+1 \leq i \leq n+m. \end{cases} \tag{5.39}$$

Elementi baze od $\mathfrak{g}$ sada zadovoljavaju superkomutator:

$$[Z_\mu, Z_\nu] = \sum_{\alpha=1}^{n+m} A_{\mu\nu\alpha} Z_\alpha, \tag{5.40}$$

gdje su strukturne konstante $A_{\mu\nu\alpha}$ dane sljedećom tablicom:

1.

$$A_{\mu\nu\alpha} = \begin{cases} C_{\mu\nu\alpha}, & 1 \leq \mu, \nu \leq n,\ 1 \leq \alpha \leq n, \\ 0, & 1 \leq \mu, \nu \leq n,\ n+1 \leq \alpha \leq n+m. \end{cases} \tag{5.41}$$

2.

$$A_{\mu(n+\nu)\alpha} = \begin{cases} 0, & 1 \leq \mu, \leq n,\ 1 \leq \nu \leq m,\ 1 \leq \alpha \leq n, \\ -K_{\nu\mu(\alpha-n)}, & 1 \leq \mu, \leq n,\ 1 \leq \nu \leq m,\ n+1 \leq \alpha \leq n+m. \end{cases} \tag{5.42}$$

3.

$$A_{(\mu+n)\nu\alpha} = \begin{cases} 0, & 1 \leq \mu, \leq m,\ 1 \leq \nu \leq n,\ 1 \leq \alpha \leq n, \\ K_{\mu\nu(\alpha-n)}, & 1 \leq \mu, \leq m,\ 1 \leq \nu \leq n,\ n+1 \leq \alpha \leq n+m. \end{cases} \tag{5.43}$$

4.

$$A_{(n+\mu)(n+\nu)\alpha} = 0, \quad 1 \leq \mu, \nu \leq m,\ 1 \leq \alpha \leq n+m. \tag{5.44}$$

Kao posljedica graduirane simetrije i graduiranog Jacobijevog identiteta za elemente baze Z_μ slijedi da je:

$$A_{\mu\nu\alpha} = -(-1)^{|\mu||\nu|} A_{\nu\mu\alpha} \tag{5.45}$$

$$\sum_{\alpha=1}^{n+m} ((-1)^{|\nu||\lambda|} A_{\mu\nu\alpha} A_{\lambda\alpha\beta} + (-1)^{|\lambda||\mu|} A_{\nu\lambda\alpha} A_{\mu\alpha\beta} + (-1)^{|\mu||\nu|} A_{\lambda\mu\alpha} A_{\nu\alpha\beta}) = 0. \tag{5.46}$$

5.5 Proširenje Liejeve superalgebre

Analogno kao u prvom poglavlju Liejevu superalgebru $\mathfrak{g}$ možemo proširiti Abelovom familijom generatora $\{T_{\mu\nu} \mid 1 \leq \mu, \nu \leq n+m\}$ za koje vrijede relacije:

$$[T_{\mu\nu}, T_{\alpha\beta}] = 0, \tag{5.47}$$

$$[T_{\mu\nu}, Z_\lambda] = \sum_{\alpha=1}^{n+m} A_{\mu\lambda\alpha} T_{\alpha\nu}. \tag{5.48}$$

Radi jednostavnosti uvodimo sljedeće oznake za $T_{\mu\nu}$:

$$T^1_{\mu\nu} = T_{\mu\nu}, \quad 1 \leq \mu, \nu \leq n, \tag{5.49}$$

$$T^2_{\mu\nu} = T_{\mu(n+\nu)}, \quad 1 \leq \mu \leq n,\ 1 \leq \nu \leq m, \tag{5.50}$$

$$T^3_{\mu\nu} = T_{(n+\mu)\nu}, \quad 1 \leq \mu \leq m,\ 1 \leq \nu \leq n, \tag{5.51}$$

$$T^4_{\mu\nu} = T_{(n+\mu)(n+\nu)}, \quad 1 \leq \mu, \nu \leq m, \tag{5.52}$$

gdje stupnjeve od $T_{\mu\nu}$ definiramo sa:

$$|T^1_{\mu\nu}| = 0, \quad |T^2_{\mu\nu}| = 1, \quad |T^3_{\mu\nu}| = 0, \quad |T^4_{\mu\nu}| = 0. \tag{5.53}$$

Iz relacije (5.48) slijedi da je:

$$[T^1_{\mu\nu}, X_\lambda] = \sum_{\alpha=1}^{n} C_{\mu\lambda\alpha} T^1_{\alpha\nu}, \tag{5.54}$$

$$[T^1_{\mu\nu}, \xi_\lambda] = -\sum_{\alpha=1}^{m} K_{\lambda\mu\alpha} T^3_{\alpha\nu}, \tag{5.55}$$

$$[T^2_{\mu\nu}, X_\lambda] = \sum_{\alpha=1}^{n} C_{\mu\lambda\alpha} T^2_{\alpha\nu}, \tag{5.56}$$

$$[T^2_{\mu\nu}, \xi_\lambda] = -\sum_{\alpha=1}^{m} K_{\lambda\mu\alpha} T^4_{\alpha\nu}, \tag{5.57}$$

$$[T^3_{\mu\nu}, X_\lambda] = \sum_{\alpha=1}^{m} K_{\mu\lambda\alpha} T^3_{\alpha\nu}, \tag{5.58}$$

$$[T^3_{\mu\nu}, \xi_\lambda] = 0, \tag{5.59}$$

$$[T^4_{\mu\nu}, X_\lambda] = \sum_{\alpha=1}^{m} K_{\mu\lambda\alpha} T^4_{\alpha\nu} \tag{5.60}$$

$$[T^4_{\mu\nu}, \xi_\lambda] = 0. \tag{5.61}$$

Proširenje superalgebre $\mathfrak{g}$ sa operatorima $T_{\mu\nu}$ ćemo označiti sa $\mathfrak{g}^L$. Elementi baze $\{Z_\lambda, T_{\mu\nu} \mid \lambda, \mu, \nu = 1, 2, \ldots, n+m\}$ od $\mathfrak{g}^L$ zadovoljavaju relacije (5.40), (5.47) i (5.48). Pokazat ćemo da je relacijama (5.40), (5.47) i (5.48) definirana struktura Liejeve superalgebre, tj. provjerit ćemo da su zadovoljeni svi Jacobijevi identiteti. Jacobijevi identiteti

$$\begin{aligned} &[[T^1_{\alpha\beta}, X_\mu], X_\nu] + [[X_\mu, X_\nu], T^1_{\alpha\beta}] + [X_\nu, [T^1_{\alpha\beta}, X_\mu]] \\ &= \sum_{\kappa=1}^{n} \big[\sum_{\rho=1}^{n} C_{\alpha\mu\kappa} C_{\kappa\nu\rho} + C_{\mu\nu\kappa} C_{\kappa\alpha\rho} + C_{\nu\alpha\kappa} C_{\kappa\mu\rho} \big] T^1_{\rho\beta} = 0. \end{aligned} \tag{5.62}$$

i

$$\begin{aligned} &[[T^1_{\mu\nu}, X_\alpha], \xi_\beta] + [[X_\alpha, \xi_\beta], T^1_{\mu\nu}] + [\xi_\beta, [T^1_{\mu\nu}, X_\mu]] \\ &= \sum_{\kappa=1}^{n} \big[\sum_{\rho=1}^{m} K_{\beta\alpha\rho} K_{\rho\mu\kappa} - \sum_{\rho=1}^{m} K_{\beta\mu\rho} K_{\rho\alpha\kappa} + \sum_{\rho=1}^{n} C_{\mu\alpha\rho} K_{\beta\rho\kappa} \big] T^3_{\kappa\nu} = 0 \end{aligned} \tag{5.63}$$

proizlaze iz (5.37) i (5.38), dok

$$[[T^1_{\mu\nu}, \xi_\alpha], \xi_\beta] + [[\xi_\alpha, \xi_\beta], T^1_{\mu\nu}] - [\xi_\beta, [T^1_{\mu\nu}, \xi_\mu]] = 0 \tag{5.64}$$

proizlazi iz (5.55) i (5.59). Relacija

$$[[T^2_{\alpha\beta}, X_\mu], X_\nu] + [[X_\mu, X_\nu], T^2_{\alpha\beta}] + [X_\nu, [T^2_{\alpha\beta}, X_\mu]] = 0 \tag{5.65}$$

se pokaže jednako kao i (5.62). Identiteti

$$\begin{aligned} &- [[T^2_{\mu\nu}, X_\alpha], \xi_\beta] + [[X_\alpha, \xi_\beta], T^2_{\mu\nu}] + [\xi_\beta, [T^2_{\mu\nu}, X_\mu]] \\ &= \sum_{\kappa=1}^{n} \big[\sum_{\rho=1}^{m} K_{\beta\mu\rho} K_{\rho\alpha\kappa} - \sum_{\rho=1}^{m} K_{\beta\alpha\rho} K_{\rho\mu\kappa} + \sum_{\rho=1}^{n} C_{\alpha\mu\rho} K_{\beta\rho\kappa} \big] T^4_{\kappa\nu} = 0, \end{aligned} \tag{5.66}$$

i

$$[[T^2_{\mu\nu}, \xi_\alpha], \xi_\beta] + [[\xi_\alpha, \xi_\beta], T^2_{\mu\nu}] - [\xi_\beta, [T^2_{\mu\nu}, \xi_\mu]] = 0 \tag{5.67}$$

slijede iz relacija (5.57) i (5.61). Nadalje, vrijedi

$$\begin{aligned} &[[T^3_{\alpha\beta}, X_\mu], X_\nu] + [[X_\mu, X_\nu], T^3_{\alpha\beta}] + [X_\nu, [T^3_{\alpha\beta}, X_\mu]] \\ &= \sum_{\kappa=1}^{n} \big[\sum_{\rho=1}^{m} K_{\mu\beta\rho} K_{\rho\alpha\kappa} - \sum_{\rho=1}^{m} K_{\mu\alpha\rho} K_{\rho\beta\kappa} + \sum_{\rho=1}^{n} C_{\alpha\beta\rho} K_{\mu\rho\kappa} \big] T^3_{\kappa\nu} = 0, \end{aligned} \tag{5.68}$$

dok

$$\begin{aligned} &[[T^3_{\mu\nu}, X_\alpha], \xi_\beta] + [[X_\alpha, \xi_\beta], T^3_{\mu\nu}] + [\xi_\beta, [T^3_{\mu\nu}, X_\mu]] = 0, \\ &[[T^3_{\mu\nu}, \xi_\alpha], \xi_\beta] + [[\xi_\alpha, \xi_\beta], T^3_{\mu\nu}] - [\xi_\beta, [T^3_{\mu\nu}, \xi_\mu]] = 0. \end{aligned} \tag{5.69}$$

proizlazi iz relacija (5.58) i (5.59). Konačno, za operatore $T^4_{\mu\nu}$ relacija (5.38) implicira da je

$$\begin{aligned} &[[T^4_{\alpha\beta}, X_\mu], X_\nu] + [[X_\mu, X_\nu], T^4_{\alpha\beta}] + [X_\nu, [T^4_{\alpha\beta}, X_\mu]] \\ &= \sum_{\kappa=1}^{n} \big[\sum_{\rho=1}^{m} K_{\mu\beta\rho} K_{\rho\alpha\kappa} - \sum_{\rho=1}^{m} K_{\mu\alpha\rho} K_{\rho\beta\kappa} + \sum_{\rho=1}^{n} C_{\alpha\beta\rho} K_{\mu\rho\kappa} \big] T^4_{\kappa\nu} = 0 \end{aligned} \tag{5.70}$$

a iz relacije (5.61) slijedi da je

$$[[T^4_{\mu\nu}, X_\alpha], \xi_\beta] + [[X_\alpha, \xi_\beta], T^4_{\mu\nu}] + [\xi_\beta, [T^4_{\mu\nu}, X_\mu]] = 0, \tag{5.71}$$
$$[[T^4_{\mu\nu}, \xi_\alpha], \xi_\beta] + [[\xi_\alpha, \xi_\beta], T^4_{\mu\nu}] - [\xi_\beta, [T^4_{\mu\nu}, \xi_\mu]] = 0.$$

Teorem 5.2 *Neka je $\mathfrak{g}^L$ Liejeva superalgebra generirana bazom $\{Z_\lambda, T_{\mu\nu} \mid \lambda, \mu, \nu = 1, 2, \ldots, n+m\}$ čiji elementi zadovoljavaju relacije (5.40), (5.47) i (5.48). Tada postoji lijevo djelovanje $U(\mathfrak{g}^L) \otimes U(\mathfrak{g}) \to U(\mathfrak{g})$ univerzalne omotačke algebre $U(\mathfrak{g}^L)$ na $U(\mathfrak{g})$, $a \otimes b \to a \blacktriangleright b$, definirane sa*

$$1 \blacktriangleright f = f, \quad Z_\mu \blacktriangleright f = Z_\mu f, \tag{5.72}$$

$$T_{\mu\nu} \blacktriangleright 1 = \delta_{\mu\nu} 1, \quad (ab) \blacktriangleright Z = a \blacktriangleright (b \blacktriangleright Z), \ \forall Z \in U(\mathfrak{g}), \forall a, b \in U(\mathfrak{g}^L), \tag{5.73}$$

$$T_{\mu\nu} \blacktriangleright (fg) = \sum_{\alpha=1}^{n+m} (-1)^{|T_{\alpha\nu}||f|} (T_{\mu\alpha} \blacktriangleright f)(T_{\alpha\nu} \blacktriangleright g), \ \forall f, g \in U(\mathfrak{g}). \tag{5.74}$$

Dokaz

Dokaz provodimo u nekoliko koraka.

1. korak

U prvom koraku dokaza pokazat ćemo da je djelovanje operatora $T_{\mu\nu}$ na generatore $Z_\lambda \in U(\mathfrak{g})$ jedinstveno određeno komutacijskim relacijama na $U(g^L)$ uz pretpostavke (5.72)-(5.73). Iz relacije (5.48) i normalizacijskog uvjeta slijedi da je

$$[T_{\mu\nu}, Z_\lambda] \blacktriangleright 1 = \big(\sum_{\alpha=1}^{n+m} A_{\mu\lambda\alpha} T_{\alpha\nu} \big) \blacktriangleright 1 \tag{5.75}$$

$$T_{\mu\nu} \blacktriangleright (Z_\lambda \blacktriangleright 1) - (-1)^{|T_{\mu\nu}||Z_\lambda|} Z_\lambda \blacktriangleright (T_{\mu\nu} \blacktriangleright 1) = \sum_{\alpha=1}^{n} A_{\mu\lambda\alpha} \delta_{\alpha\mu}, \tag{5.76}$$

$$T_{\mu\nu} \blacktriangleright Z_\lambda = (-1)^{|T_{\mu\nu}||Z_\lambda|} \delta_{\mu\nu} Z_\lambda + A_{\mu\lambda\nu}. \tag{5.77}$$

Iz relacije (5.77) dobijamo sljedeću tablicu za djelovanje operatora $T^k_{\mu\nu},\ k=1,2,3,4$ na generatore $Z_\lambda = X_\lambda$, i $Z_{\lambda+n} = \xi_\lambda$:

$$T^1_{\mu\nu} \blacktriangleright X_\lambda = \delta_{\mu\nu} X_\lambda + C_{\mu\lambda\nu}, \tag{5.78}$$

$$T^1_{\mu\nu} \blacktriangleright \xi_\lambda = \delta_{\mu\nu} \xi_\lambda, \tag{5.79}$$

$$T^2_{\mu\nu} \blacktriangleright X_\lambda = 0, \tag{5.80}$$

$$T^2_{\mu\nu} \blacktriangleright \xi_\lambda = -K_{\lambda\mu\nu}, \tag{5.81}$$

$$T^3_{\mu\nu} \blacktriangleright X_\lambda = 0, \tag{5.82}$$

$$T^3_{\mu\nu} \blacktriangleright \xi_\lambda = 0, \tag{5.83}$$

$$T^4_{\mu\nu} \blacktriangleright X_\lambda = \delta_{\mu\nu} X_\lambda + K_{\mu\lambda\nu}, \tag{5.84}$$

$$T^4_{\mu\nu} \blacktriangleright \xi_\lambda = \delta_{\mu\nu} \xi_\lambda. \tag{5.85}$$

$$\tag{5.86}$$

Da bi dokazali da vrijedi relacija (5.74), prvo moramo dokazati sljedeću tvrdnju.

Tvrdnja

$$T^k_{\mu\nu} \blacktriangleright (fg) = [T^k_{\mu\nu}, f] \blacktriangleright g + (-1)^{|T^k_{\mu\nu}||f|} f(T^k_{\mu\nu} \blacktriangleright g),\ \forall f, g \in U(\mathfrak{g}),\ k = 1,2,3,4. \tag{5.87}$$

Iz definicije superkomutatora imamo da je

$$[T^k_{\mu\nu}, fg] \blacktriangleright 1 = T^k_{\mu\nu} \blacktriangleright (fg) - (-1)^{|T^k_{\mu\nu}||fg|} fg(T^k_{\mu\nu} \blacktriangleright 1). \tag{5.88}$$

S druge strane koristeći graduirano Leibnizovo dobivamo

$$[T^k_{\mu\nu}, fg] \blacktriangleright 1 = \left([T^k_{\mu\nu}, f]g + (-1)^{|T^k_{\mu\nu}||f|} f[T^k_{\mu\nu}, g]\right) \blacktriangleright 1 \tag{5.89}$$

$$= [T^k_{\mu\nu}, f] \blacktriangleright g + (-1)^{|T^k_{\mu\nu}||f|} f(T^k_{\mu\nu} \blacktriangleright g) - (-1)^{|T^k_{\mu\nu}||fg|} fg(T^k_{\mu\nu} \blacktriangleright 1) \tag{5.90}$$

Uspoređujući izraze (5.88) i (5.90) slijedi tvrdnja (5.87). Nadalje, relaciju (5.74) ćemo dokazati promatrajući posebno slučajeve za generatore $T^k_{\mu\nu},\ 1 \le k \le 4$. U tu svrhu dokazat ćemo sljedeće četiri tvrdnje koje vrijede za svaki $f, g \in U(\mathfrak{g})$.

Tvrdnja 1.

$$T^1_{\mu\nu} \blacktriangleright (fg) = \sum_{\lambda=1}^{n} (T^1_{\mu\lambda} \blacktriangleright f)(T^1_{\lambda\nu} \blacktriangleright g). \tag{5.91}$$

Tvrdnja 2.

$$T^2_{\mu\nu} \blacktriangleright (fg) = \sum_{\lambda=1}^{m} (T^2_{\mu\lambda} \blacktriangleright f)(T^4_{\lambda\nu} \blacktriangleright g) + (-1)^{|f||T^2_{\mu\nu}|} \sum_{\rho=1}^{n} (T^1_{\mu\rho} \blacktriangleright f)(T^2_{\rho\nu} \blacktriangleright g). \tag{5.92}$$

Tvrdnja 3.

$$T^3_{\mu\nu} \blacktriangleright (fg) = 0. \tag{5.93}$$

Tvrdnja 4.

$$T^4_{\mu\nu} \blacktriangleright (fg) = \sum_{\lambda=1}^{n} (T^4_{\mu\lambda} \blacktriangleright f)(T^4_{\lambda\nu} \blacktriangleright g). \tag{5.94}$$

Dokaze ćemo provoditi indukcijom po stupnju od monoma f, dok je $g \in U(\mathfrak{g})$ monom proizvoljnog stupnja. Općenito je monom $f \in U(\mathfrak{g})$ oblika $f = Z_1^{\nu_1} Z_2^{\nu_2} \dots Z_{n+m}^{\nu_{n+m}} \in U(\mathfrak{g})$ stupnja $|\nu| = \sum_{i=1}^{n+m} \nu_i$. Za $k = 1$ iz relacija (5.54) i (5.87) slijedi

$$\begin{aligned} T^1_{\mu\nu} \blacktriangleright (X_\lambda g) &= \sum_{\alpha=1}^{n} C_{\mu\lambda\alpha} (T^1_{\alpha\nu} \blacktriangleright g) + X_\lambda (T^1_{\mu\nu} \blacktriangleright g) \\ &= \sum_{\alpha=1}^{n} (C_{\mu\lambda\alpha} + \delta_{\mu\alpha} X_\lambda)(T^1_{\alpha\nu} \blacktriangleright g) = \sum_{\alpha=1}^{n} (T^1_{\mu\alpha} \blacktriangleright X_\lambda)(T^1_{\alpha\nu} \blacktriangleright g), \end{aligned} \tag{5.95}$$

a iz relacija (5.55) i (5.87)

$$\begin{aligned} T^1_{\mu\nu} \blacktriangleright (\xi_\alpha g) &= \sum_{\beta=1}^{n} K_{\alpha\mu\beta} (T^3_{\beta\nu} \blacktriangleright g) + \xi_\alpha (T^1_{\mu\nu} \blacktriangleright g) \\ &= \sum_{\lambda=1}^{n} (\delta_{\mu\lambda} \xi_\alpha)(T^1_{\lambda\nu} \blacktriangleright g) = \sum_{\lambda=1}^{n} (T^1_{\mu\lambda} \blacktriangleright \xi_\alpha)(T^1_{\lambda\nu} \blacktriangleright g), \end{aligned} \tag{5.96}$$

čime smo pokazali da vrijedi

$$T^1_{\mu\nu} \blacktriangleright (Z_\alpha g) = \sum_{\lambda=1}^{n} (T^1_{\mu\lambda} \blacktriangleright Z_\alpha)(T^1_{\lambda\nu} \blacktriangleright g), \tag{5.97}$$

za svaki monom Z_α stupnja jedan. Kao korak indukcije pretpostavimo da (2.12) vrijedi za sve monome f stupnja k. Tada je za monome stupnja $k+1$

$$\begin{aligned}
T^1_{\mu\nu} \blacktriangleright ((Z_\lambda f)g) &= \sum_{\alpha=1}^{n} (T^1_{\mu\alpha} \blacktriangleright Z_\lambda)(T^1_{\alpha\nu} \blacktriangleright (fg)\big) \\
&= \sum_{\beta=1}^{n} \big(\sum_{\alpha=1}^{n} (T^1_{\mu\alpha} \blacktriangleright Z_\lambda)(T^1_{\alpha\beta} \blacktriangleright f))(T^1_{\beta\nu} \blacktriangleright g)) \\
&= \sum_{\beta=1}^{n} (T^1_{\mu\beta} \blacktriangleright (Z_\lambda f))(T^1_{\beta\nu} \blacktriangleright g),
\end{aligned} \tag{5.98}$$

čime smo dokazali da relacija (5.91) vrijedi za sve monome $f \in U(\mathfrak{g})$ te je linearno možemo proširiti na sve elemente iz $U(\mathfrak{g})$.

Tvrdnja (5.93) slijedi trivijalno iz (5.82) i (5.83), a tvrdnju (5.94) dokazujemo analogno kao i prethodnu. Iz (5.60) i (5.87) slijedi da je

$$\begin{aligned}
T^4_{\mu\nu} \blacktriangleright (X_\alpha g) &= \sum_{\lambda=1}^{m} K_{\mu\alpha\lambda}(T^4_{\lambda\nu} \blacktriangleright g) + X_\alpha (T^4_{\lambda\nu} \blacktriangleright g) \\
&= \sum_{\lambda=1}^{m} (K_{\mu\alpha\lambda} + \delta_{\mu\lambda} X_\alpha)(T^4_{\lambda\nu} \blacktriangleright g) = \sum_{\lambda=1}^{m} (T^4_{\mu\lambda} \blacktriangleright X_\alpha)(T^4_{\lambda\nu} \blacktriangleright g),
\end{aligned} \tag{5.99}$$

a iz (5.61) i (5.87) dobivamo

$$\begin{aligned}
T^4_{\mu\nu} \blacktriangleright (\xi_\alpha g) &= \sum_{\lambda=1}^{m} (\delta_{\mu\lambda}\xi_\alpha)(T^4_{\lambda\nu} \blacktriangleright g) \\
&= \sum_{\lambda=1}^{m} (\delta_{\mu\lambda}\xi_\alpha)(T^4_{\lambda\nu} \blacktriangleright g) = \sum_{\lambda=1}^{m} (T^4_{\mu\lambda} \blacktriangleright \xi_\alpha)(T^4_{\lambda\nu} \blacktriangleright g).
\end{aligned} \tag{5.100}$$

Neka je $f \in U(\mathfrak{g})$ monom stupnja k. Koristeći slučaj za $n = 1$ i pretpostavku indukcije imamo da je

$$\begin{aligned}
T^4_{\mu\nu} \blacktriangleright ((Z_\alpha f)g) &= \sum_{\lambda=1}^{m} (T^4_{\mu\lambda} \blacktriangleright Z_\alpha)(T^4_{\lambda\nu} \blacktriangleright (fg)) \\
&= \sum_{\beta=1}^{m} (\sum_{\lambda=1}^{m} (T^4_{\mu\lambda} \blacktriangleright Z_\alpha)(T^4_{\lambda\beta} \blacktriangleright f))(T^4_{\beta\nu} \blacktriangleright g)) \\
&= \sum_{\beta=1}^{4} (T^4_{\mu\beta} \blacktriangleright (Z_\alpha f))(T^4_{\beta\nu} \blacktriangleright g).
\end{aligned} \tag{5.101}$$

Tvrdnja (5.94) je sada dokazana za $\forall f \in U(\mathfrak{g})$. Konačno, tvrdnje (5.91),(5.93) i (5.94) ćemo iskoristiti da bi dokazali tvrdnju (5.92). Iz (5.56) i (5.87) imamo da je

$$\begin{aligned}
T^2_{\mu\nu} \blacktriangleright (X_\alpha g) &= \sum_{\lambda=1}^{n} (C_{\mu\alpha\lambda} T^2_{\lambda\nu} \blacktriangleright g) + X_\alpha (T^2_{\mu\nu} \blacktriangleright g) \\
&= \sum_{\lambda=1}^{n} (T^2_{\mu\lambda} \blacktriangleright X_\alpha)(T^2_{\mu\nu} \blacktriangleright g) \\
&= (-1)^{|T^2_{\mu\nu}||X_\alpha|} \sum_{\lambda=1}^{n} (T^2_{\mu\lambda} \blacktriangleright X_\alpha)(T^2_{\mu\nu} \blacktriangleright g) + \sum_{\rho=1}^{m} (T^2_{\mu\rho} \blacktriangleright X_\alpha)(T^4_{\rho\nu} \blacktriangleright g),
\end{aligned}$$

gdje smo u zadnjem redu koristili relaciju $T^2_{\mu\rho} \blacktriangleright X_\alpha = 0$. Koristeći (5.57) i (5.87) dobijamo da je

$$\begin{aligned}
T^2_{\mu\nu} \blacktriangleright (\xi_\alpha g) &= -\sum_{\lambda\mu} \xi_\alpha (T^2_{\mu\nu} \blacktriangleright g) - \sum_{\rho=1}^{m} K_{\alpha\mu\rho} (T^4_{\rho\nu} \blacktriangleright f) \\
= (-1)^{|T^2_{\mu\nu}||\xi_\alpha|} &\sum_{\lambda=1}^{n} (T^1_{\mu\lambda} \blacktriangleright \xi_\alpha)(T^2_{\lambda\nu} \blacktriangleright g) + \sum_{\rho=1}^{m} (T^2_{\mu\rho} \blacktriangleright \xi_\alpha)(T^2_{\rho\nu} \blacktriangleright g).
\end{aligned} \tag{5.102}$$

Tvrdnju (5.92) smo sada dokazali za sve monome $Z_\alpha \in U(\mathfrak{g})$ stupnja 1. Pretpostavimo sada da tvrdnja vrijedi za sve monome $f \in U(\mathfrak{g})$ stupnja k. Iz prethodno dokazanog te iz tvrdnji (5.91), (5.94) i pretpostavke indukcije slijedi da je

$$\begin{aligned}
T^2_{\mu\nu} \blacktriangleright (Z_\alpha f g) &= \sum_{\alpha=1}^{m} (T^2_{\mu\lambda} \blacktriangleright Z_\alpha)(T^4_{\lambda\nu} \blacktriangleright (fg)) \\
&+ (-1)^{|Z_\alpha||T^2_{\mu\nu}|} \sum_{\rho=1}^{n} (T^1_{\mu\rho} \blacktriangleright Z_\alpha)(T^2_{\rho\nu} \blacktriangleright (fg)) \\
&= \sum_{\beta=1}^{m} \left(\sum_{\lambda=1}^{m} (T^2_{\mu\lambda} \blacktriangleright Z_\alpha)(T^4_{\lambda\beta} \blacktriangleright f) \right) (T^4_{\beta\nu} \blacktriangleright g) \\
&+ (-1)^{|Z_\alpha||T^2_{\mu\nu}|} \sum_{\beta=1}^{m} \left(\sum_{\rho=1}^{m} (T^2_{\mu\rho} \blacktriangleright Z_\alpha)(T^4_{\rho\beta} \blacktriangleright f) \right) (T^4_{\beta\nu} \blacktriangleright g) \\
&+ (-1)^{|Z_\alpha||T^2_{\mu\nu}|} \sum_{\delta=1}^{n} \left(\sum_{\rho=1}^{n} (T^1_{\mu\rho} \blacktriangleright Z_\alpha)(T^1_{\rho\delta} \blacktriangleright f) \right) (T^2_{\delta\nu} \blacktriangleright g) \\
&= \sum_{\beta=1}^{m} (T^2_{\mu\beta} \blacktriangleright (Z_\alpha f))(T^4_{\beta\nu} \blacktriangleright g) + (-1)^{|Z_\alpha||T^2_{\delta\nu}|} \sum_{\delta=1}^{n} (T^1_{\mu\delta} \blacktriangleright (Z_\alpha f))(T^2_{\delta\nu} \blacktriangleright g).
\end{aligned}$$

2. korak

U drugom dijelu dokaza pokazat ćemo konzistentnost djelovanja od $T_{\mu\nu}$ sa relacijama (5.54)-(5.61) koristeći jednadžbu (5.74). Za svaki monom $f \in U(\mathfrak{g})$ imamo da je

$$
\begin{aligned}
[T^1_{\mu\nu}, X_\lambda] \blacktriangleright f &= T^1_{\mu\nu} \blacktriangleright (X_\lambda f) - X_\lambda (T^1_{\mu\nu} \blacktriangleright f) \\
&= \sum_{\alpha=1}^{n} (\delta_{\mu\alpha} X_\lambda + C_{\mu\lambda\alpha})(T^1_{\alpha\nu} \blacktriangleright f) - X_\lambda (T^1_{\mu\nu} \blacktriangleright f) \\
&= \Big(\sum_{\alpha=1}^{n} C_{\mu\lambda\alpha} T^1_{\alpha\nu} \Big) \blacktriangleright f,
\end{aligned} \tag{5.103}
$$

$$
\begin{aligned}
[T^1_{\mu\nu}, \xi_\lambda] \blacktriangleright f &= T^2_{\mu\nu} \blacktriangleright (\xi_\lambda f) - \xi_\lambda (T^1_{\mu\nu} \blacktriangleright f) \\
&= \sum_{\alpha=1}^{n} (\delta_{\mu\alpha} \xi_\lambda)(T^1_{\alpha\nu} \blacktriangleright f) - X_\lambda (T^1_{\mu\nu} \blacktriangleright f) \\
&= -\Big(\sum_{\alpha=1}^{n} K_{\lambda\mu\alpha} T^3_{\alpha\nu} \Big) \blacktriangleright f,
\end{aligned} \tag{5.104}
$$

$$
\begin{aligned}
[T^2_{\mu\nu}, X_\lambda] \blacktriangleright f &= T^2_{\mu\nu} \blacktriangleright (X_\lambda f) - X_\lambda (T^2_{\mu\nu} \blacktriangleright f) \\
&= \sum_{\alpha=1}^{n} (T^1_{\mu\alpha} \blacktriangleright X_\lambda)(T^2_{\alpha\nu} \blacktriangleright f) - X_\lambda (T^2_{\mu\nu} \blacktriangleright f) \\
&= \sum_{\alpha=1}^{n} (\delta_{\mu\alpha} X_\lambda + C_{\mu\lambda\alpha})(T^2_{\alpha\nu} \blacktriangleright f) - X_\lambda (T^2_{\mu\nu} \blacktriangleright f) \\
&= \Big(\sum_{\alpha=1}^{n} C_{\mu\lambda\alpha} T^2_{\alpha\nu} \Big) \blacktriangleright f,
\end{aligned} \tag{5.105}
$$

$$
\begin{aligned}
[T^2_{\mu\nu}, \xi_\lambda] \blacktriangleright f &= T^2_{\mu\nu} \blacktriangleright (\xi_\lambda f) + \xi_\lambda (T^2_{\mu\nu} \blacktriangleright f) \\
&= \sum_{\alpha=1}^{m} (T^2_{\mu\alpha} \blacktriangleright \xi_\lambda)(T^4_{\alpha\nu} \blacktriangleright f) \\
&\quad - \sum_{\rho=1}^{n} (T^1_{\mu\rho} \blacktriangleright \xi_\alpha)(T^2_{\rho\nu} \blacktriangleright f) + \xi_\lambda (T^2_{\mu\nu} \blacktriangleright f) \\
&= \sum_{\alpha=1}^{m} \Big(- K_{\lambda\mu\alpha} T^4_{\alpha\nu} \Big) \blacktriangleright f,
\end{aligned} \tag{5.106}
$$

$$\begin{aligned}[T^3_{\mu\nu}, X_\lambda] \blacktriangleright f &= T^3_{\mu\nu} \blacktriangleright (X_\lambda f) - X_\lambda (T^3_{\mu\nu} \blacktriangleright f) \\ &= 0 = \Big(\sum_{\alpha=1}^{m} K_{\mu\lambda\alpha} T^3_{\alpha\nu}\Big) \blacktriangleright f,\end{aligned} \tag{5.107}$$

$$[T^3_{\mu\nu}, \xi_\lambda] \blacktriangleright f = T^3_{\mu\nu} \blacktriangleright (\xi_\lambda f) - \xi_\lambda (T^3_{\mu\nu} \blacktriangleright f) = 0, \tag{5.108}$$

$$\begin{aligned}[T^4_{\mu\nu}, X_\lambda] \blacktriangleright f &= \sum_{\alpha=1}^{m} (T^4_{\mu\alpha} \blacktriangleright X_\lambda)(T^4_{\alpha\nu} \blacktriangleright f) - X_\lambda (T^4_{\mu\nu} \blacktriangleright f) \\ &= \sum_{\alpha=1}^{m} (\delta_{\mu\alpha} X_\lambda + K_{\mu\lambda\alpha})(T^4_{\alpha\nu} \blacktriangleright f) - X_\lambda (T^4_{\mu\nu} \blacktriangleright f) \\ &= \Big(\sum_{\alpha=1}^{m} K_{\mu\lambda\alpha} T^4_{\alpha\nu}\Big) \blacktriangleright f,\end{aligned} \tag{5.109}$$

$$\begin{aligned}[T^4_{\mu\nu}, \xi_\lambda] \blacktriangleright f &= \sum_{\alpha=1}^{m} (T^4_{\mu\alpha} \blacktriangleright \xi_\lambda)(T^4_{\alpha\nu} \blacktriangleright f) - \xi_\lambda (T^4_{\mu\nu} \blacktriangleright f) \\ &= \sum_{\alpha=1}^{m} \Big(\delta_{\mu\alpha} \xi_\lambda (T^4_{\alpha\nu} \blacktriangleright f) - X_\xi (T^4_{\mu\nu} \blacktriangleright f)\Big) = 0.\end{aligned} \tag{5.110}$$

3. korak

Nadalje, trebamo pokazati da je djelovanje generatora $T^k_{\mu\nu}$ dobro definirano, tj. da je konzistentno sa relacijama (5.34)-(5.36). Pri dokazivanju konzistentnosti koristimo jednadžbu (5.74) i Jacobijeve identitete (5.37) i (5.38). Za djelovanje generatora $T^1_{\mu\nu}$ iz (5.74) slijedi da je

$$T^1_{\mu\nu} \blacktriangleright (X_\alpha X_\beta) = \delta_{\mu\nu} X_\alpha X_\beta + C_{\mu\beta\nu} X_\alpha + C_{\mu\alpha\nu} X_\beta + \sum_{\rho=1}^{n} C_{\mu\alpha\rho} C_{\rho\beta\nu} \tag{5.111}$$

iz čega je

$$T^1_{\mu\nu} \blacktriangleright [X_\alpha, X_\beta] = \delta_{\mu\nu} [X_\alpha, X_\beta] + \sum_{\rho=1}^{n} (C_{\mu\alpha\rho} C_{\rho\beta\nu} + C_{\beta\mu\rho} C_{\rho\alpha\nu}). \tag{5.112}$$

S druge strane je

$$T^1_{\mu\nu} \blacktriangleright (\sum_{\rho=1}^{n} C_{\alpha\beta\rho} X_\rho) = \delta_{\mu\nu}[X_\alpha, X_\beta] - \sum_{\rho=1}^{n} C_{\alpha\beta\rho} C_{\rho\mu\nu}, \tag{5.113}$$

te iz Jacobijevog identiteta (5.37) slijedi

$$\begin{aligned} &T^1_{\mu\nu} \blacktriangleright ([X_\alpha, X_\beta] - \sum_{\rho=1}^{n} C_{\alpha\beta\rho} X_\rho) \\ &= \sum_{\rho=1}^{n} (C_{\mu\alpha\rho} C_{\rho\beta\nu} + C_{\alpha\beta\rho} C_{\rho\mu\nu} + C_{\beta\mu\rho} C_{\rho\alpha\nu}) = 0. \end{aligned} \tag{5.114}$$

Nadalje, iz (5.74) imamo

$$\begin{aligned} &T^1_{\mu\nu} \blacktriangleright (\xi_\alpha \xi_\beta + \xi_\beta \xi_\alpha) \\ &= \sum_{\rho=1}^{n} (\delta_{\mu\rho}\xi_\alpha)(\delta_{\rho\nu}\xi_\beta) + \sum_{\rho=1}^{n} (\delta_{\mu\rho}\xi_\beta)(\delta_{\rho\nu}\xi_\alpha) \\ &= \delta_{\mu\nu}(\xi_\alpha \xi_\beta + \xi_\beta \xi_\alpha) = 0, \end{aligned} \tag{5.115}$$

te

$$\begin{aligned} &T^1_{\mu\nu} \blacktriangleright (\xi_\alpha X_\beta - X_\beta \xi_\alpha - \sum_{\lambda=1}^{m} K_{\alpha\beta\lambda} \xi_\lambda) \\ &= \delta_{\mu\nu}\xi_\alpha X_\beta + C_{\mu\beta\nu}\xi_\alpha - C_{\mu\beta\nu}\xi_\alpha - \delta_{\mu\nu}\xi_\alpha X_\beta - \sum_{\lambda=1}^{m} K_{\alpha\beta\lambda}\xi_\lambda \delta_{\mu\nu} = 0. \end{aligned} \tag{5.116}$$

Za $T^3_{\mu\nu}$ konzistentnost trivijalno slijedi iz činjenice da je $T^3_{\mu\nu} \blacktriangleright Z_\lambda = 0$. Provjerimo sada konzistentnost za $T^4_{\mu\nu}$. Imamo da je

$$T^4_{\mu\nu} \blacktriangleright (X_\alpha X_\beta) = \delta_{\mu\nu} X_\alpha X_\beta + K_{\mu\beta\nu} X_\alpha + K_{\mu\alpha\nu} X_\beta + \sum_{\rho=1}^{n} K_{\mu\alpha\rho} K_{\rho\beta\nu}, \tag{5.117}$$

iz čega je

$$T^4_{\mu\nu} \blacktriangleright [X_\alpha, X_\beta] = \delta_{\mu\nu}[X_\alpha, X_\beta] + \sum_{\rho=1}^{n} (K_{\mu\alpha\rho} K_{\rho\beta\nu} - K_{\mu\beta\rho} K_{\rho\alpha\nu}). \tag{5.118}$$

S druge strane je

$$T^4_{\mu\nu} \blacktriangleright (\sum_{\rho=1}^{n} C_{\alpha\beta\rho} X_\rho) = \delta_{\mu\nu}[X_\alpha, X_\beta] - \sum_{\rho=1}^{n} C_{\alpha\beta\rho} K_{\mu\rho\nu}, \tag{5.119}$$

a iz Jacobijevog identiteta (5.38) slijedi

$$\begin{aligned} &T^4_{\mu\nu} \blacktriangleright ([X_\alpha, X_\beta] - \sum_{\rho=1}^{n} C_{\alpha\beta\rho} X_\rho) \\ &= \Big(\sum_{\rho=1}^{m} K_{\mu\alpha\rho} K_{\rho\beta\nu} - \sum_{\rho=1}^{m} K_{\mu\beta\rho} K_{\rho\alpha\nu} \sum_{\rho=1}^{n} + C_{\alpha\beta\rho} K_{\rho\mu\nu} \Big) = 0. \end{aligned} \tag{5.120}$$

Iz relacije (5.74) se lako pokaže da je

$$\begin{aligned} &T^4_{\mu\nu} \blacktriangleright (\xi_\alpha \xi_\beta + \xi_\beta \xi_\alpha) \\ &= \sum_{\rho=1}^{m} (\delta_{\mu\rho}\xi_\alpha)(\delta_{\rho\nu}\xi_\beta) + \sum_{\rho=1}^{m} (\delta_{\mu\rho}\xi_\beta)(\delta_{\rho\nu}\xi_\alpha) = \delta_{\mu\nu}(\xi_\alpha\xi_\beta + \xi_\beta\xi_\alpha) = 0 \end{aligned} \tag{5.121}$$

i

$$\begin{aligned} &T^4_{\mu\nu} \blacktriangleright (\xi_\alpha X_\beta - X_\beta \xi_\alpha - \sum_{\lambda=1}^{m} K_{\alpha\beta\lambda} \xi_\lambda) \\ &= \delta_{\mu\nu}\xi_\alpha X_\beta + K_{\mu\beta\nu}\xi_\alpha - K_{\mu\beta\nu}\xi_\alpha - \delta_{\mu\nu}\xi_\alpha X_\beta - \sum_{\lambda=1}^{m} K_{\alpha\beta\lambda}\xi_\lambda \delta_{\mu\nu} = 0. \end{aligned} \tag{5.122}$$

Konzistencija djelovanja generatora $T^2_{\mu\nu}$ s relacijom (5.34) slijedi trvijalno jer je $T^2_{\mu\nu} \blacktriangleright X_\lambda = 0$. Pogledajmo sada djelovanje $T^2_{\mu\nu} \blacktriangleright [\xi_\alpha, \xi_\beta]$. Iz (5.74) imamo da je

$$\begin{aligned} T^2_{\mu\nu} \blacktriangleright (\xi_\alpha \xi_\beta) &= \sum_{\lambda=1}^{m} (T^2_{\mu\lambda} \blacktriangleright \xi_\alpha)(T^4_{\lambda\nu} \blacktriangleright \xi_\beta) - \sum_{\rho=1}^{n} (T^1_{\mu\lambda} \blacktriangleright \xi_\alpha)(T^2_{\lambda\nu} \blacktriangleright \xi_\beta) \\ &= -K_{\alpha\mu\nu}\xi_\beta + K_{\beta\mu\nu}\xi_\alpha, \end{aligned} \tag{5.123}$$

iz čega slijedi da je

$$T^2_{\mu\nu} \blacktriangleright (\xi_\alpha\xi_\beta + \xi_\beta\xi_\alpha) = 0. \tag{5.124}$$

Konačno, imamo da je

$$T^2_{\mu\nu} \blacktriangleright (\xi_\alpha X_\beta) = -K_{\alpha\mu\nu} X_\beta - \sum_{\lambda=1}^{m} K_{\alpha\mu\lambda} K_{\lambda\beta\nu}, \tag{5.125}$$

a

$$T^2_{\mu\nu} \blacktriangleright (X_\beta \xi_\alpha) = -K_{\alpha\mu\nu} X_\beta - \sum_{\rho=1}^{n} C_{\mu\beta\rho} K_{\alpha\rho\nu}. \tag{5.126}$$

S druge strane je

$$T^2_{\mu\nu} \blacktriangleright (\sum_{\lambda=1}^{m} K_{\alpha\beta\lambda} \xi_\lambda) = -\sum_{\lambda=1}^{m} K_{\alpha\beta\lambda} K_{\lambda\mu\nu}, \tag{5.127}$$

pa iz Jacobijevog identiteta (5.38) slijedi da je

$$T^2_{\mu\nu} \blacktriangleright ([\xi_\alpha, X_\beta] - \sum_{\lambda=1}^{m} K_{\alpha\beta\lambda} \xi_\lambda) = 0. \tag{5.128}$$

Provjerimo još i da je djelovanje konzistentno sa relacijom (5.47). Imamo da je

$$\begin{aligned}
&(T_{\alpha\beta} T_{\mu\nu}) \blacktriangleright Z_\lambda = T_{\alpha\beta} \blacktriangleright (T_{\mu\nu} \blacktriangleright Z_\lambda) \\
&= T_{\alpha\beta} \blacktriangleright ((-1)^{|T_{\mu\nu}||Z_\lambda|} \delta_{\mu\nu} Z_\lambda + C_{\mu\lambda\nu}) \\
&= (-1)^{|T_{\mu\nu}||Z_\lambda|} (-1)^{|T_{\alpha\beta}||Z_\lambda|} \delta_{\mu\nu} \delta_{\alpha\beta} Z_\lambda + (-1)^{|T_{\mu\nu}||Z_\lambda|} \delta_{\mu\nu} C_{\alpha\lambda\beta} + \delta_{\alpha\beta} C_{\alpha\lambda\beta}.
\end{aligned} \tag{5.129}$$

Iz prethodnog slijedi da za svaki $Z_\lambda = X_\lambda$ i $Z_{\lambda+n} = \xi_\lambda$ vrijedi da je $[T_{\mu\nu}, T_{\alpha\beta}] \blacktriangleright Z_\lambda = 0$, iz čega se indukcijom pokaže da tvrdnja vrijedi za svaki monom $f \in U(\mathfrak{g})$. ■

Lema 5.1 *Neka je $f = X_1^{k_1} \cdots X_n^{k_n} \in U(\mathfrak{g}_0)$ monom. Tada vrijedi*

$$Z_\lambda f = \sum_{\rho=1}^{n+m} (T_{\lambda\rho} \blacktriangleright f) Z_\rho, \tag{5.130}$$

$\forall f = X_1^{k_1} \cdots X_n^{k_n} \in U(\mathfrak{g}_0),\ \forall Z_\lambda = X_\lambda,\ Z_{\lambda+n} = \xi_\lambda.$

Dokaz Dokaz provodimo indukcijom po stupnju monoma $f = X_1^{k_1} \cdots X_n^{k_n} \in U(\mathfrak{g}_0)$. Neka je $f = X_\alpha$. Tada iz komutacijskih relacija (5.40) i (5.78) slijedi

$$\begin{aligned}
X_\lambda X_\alpha &= X_\alpha X_\lambda + \sum_{\rho=1}^{n} C_{\lambda\alpha\rho} X_\rho \\
&= \sum_{\rho=1}^{n} (\delta_{\lambda\rho} X_\alpha + C_{\lambda\alpha\rho}) X_\rho \\
&= \sum_{\rho=1}^{n} (T^1_{\lambda\rho} \blacktriangleright X_\alpha) X_\rho = \sum_{\rho=1}^{n+m} (T_{\lambda\rho} \blacktriangleright X_\alpha) X_\rho,
\end{aligned} \tag{5.131}$$

a iz (5.40) i (5.84)

$$\begin{aligned}\xi_\lambda X_\alpha &= X_\alpha \xi_\lambda + \sum_{\rho=1}^{m} K_{\lambda\alpha\rho}\xi_\rho \\ &= \sum_{\rho=1}^{n}(\delta_{\lambda\rho}X_\alpha - K_{\lambda\alpha\rho})\xi_\rho \\ &= \sum_{\rho=1}^{n}(T^4_{\lambda\rho} \blacktriangleright X_\alpha)\xi_\rho = \sum_{\rho=1}^{n+m}(T_{\lambda\rho} \blacktriangleright X_\alpha)\xi_\rho, \end{aligned} \tag{5.132}$$

čime smo tvrdnju dokazali za sve monome $f = X_\alpha \in U(\mathfrak{g}_0)$ stupnja jedan. Pretpostavimo sada da tvrdnja (5.170) vrijedi za sve monome $f = X_1^{k_1} \cdots X_n^{k_n} \in U(\mathfrak{g}_0)$ stupnja k. Imamo da je

$$\begin{aligned}(Z_\lambda X_\alpha)f &= \sum_{\rho=1}^{n+m}(T_{\lambda\rho} \blacktriangleright X_\alpha)(Z_\rho f) \\ &= \sum_{\rho=1}^{n+m}\sum_{\beta=1}^{n+m}(T_{\rho\beta} \blacktriangleright f)(T_{\lambda\rho} \blacktriangleright X_\alpha)Z_\beta = \sum_{\beta=1}^{n+m}(T_{\lambda\beta} \blacktriangleright (X_\alpha f))Z_\beta.\end{aligned}$$

■

Analogno kao i u prvom dijelu, superalgebru $\mathfrak{g}$ možemo proširiti generatorima $S_{\mu\nu}$.

Teorem 5.3 *Neka je $\mathfrak{g}^R$ Liejeva algebra sa bazom $\{Z_\lambda, S_{\mu\nu} \mid 1 \le \lambda, \mu, \nu \le n+m\}$ čiji elementi zadovoljavaju superkomutator* (5.40) *i relacije*

$$[S_{\alpha,\beta}, S_{\mu\nu}] = 0, \tag{5.133}$$

$$[S_{\mu\nu}, Z_\lambda] = -\sum_{\alpha=1}^{n+m} A_{\alpha\lambda\nu}S_{\mu\alpha}. \tag{5.134}$$

Tada postoji lijevo djelovanje $\blacktriangleright : U(\mathfrak{g}^R) \otimes U(\mathfrak{g}) \to U(\mathfrak{g})$ za koje vrijedi:

$$1 \blacktriangleright f = f, \quad Z_\mu \blacktriangleright f = Z_\mu f, \tag{5.135}$$

$$S_{\mu\nu} \blacktriangleright 1 = \delta_{\mu\nu}1, \quad (ab) \blacktriangleright Z = a \blacktriangleright (b \blacktriangleright Z), \ \forall Z \in U(\mathfrak{g}), \forall a, b \in U(\mathfrak{g}^R), \tag{5.136}$$

$$S_{\mu\nu} \blacktriangleright (fg) = \sum_{\alpha=1}^{n+m}(-1)^{|S_{\mu\alpha}||f|}(S_{\alpha\nu} \blacktriangleright f)(S_{\mu\alpha} \blacktriangleright g), \ \forall f, g \in U(\mathfrak{g}). \tag{5.137}$$

Dokaz Konzistentnost djelovanja generatora $S_{\mu\nu}$ sa relacijama (5.40), (5.133) i (5.134) te svi Jacobijevi identiteti se dokažu analogno kao i u prethodnom teoremu. Ovdje ćemo samo dokazati da vrijedi tvrdnja (5.137). Iz pretpostavki (5.135)-(5.136) i relacije (5.134) slijedi

$$[S_{\mu\nu}, Z_\lambda] \blacktriangleright 1 = -\Big(\sum_{\alpha=1}^{n+m} A_{\alpha\lambda\nu} S_{\mu\alpha}\Big) \blacktriangleright 1$$

$$S_{\mu\nu} \blacktriangleright Z_\lambda = (-1)^{|S_{\mu\nu}||Z_\lambda|} \delta_{\mu\nu} Z_\lambda - A_{\mu\lambda\nu}. \tag{5.138}$$

Definirajmo generatore $S^k_{\mu\nu}$, za $k = 1, 2, 3, 4$ analogno generatorima $T^k_{\mu\nu}$. Tada imamo sljedeću tabilicu djelovanja operatora $S^k_{\mu\nu}$ na elemente baze Z_λ:

$$S^1_{\mu\nu} \blacktriangleright X_\lambda = \delta_{\mu\nu} X_\lambda - C_{\mu\lambda\nu}, \tag{5.139}$$

$$S^1_{\mu\nu} \blacktriangleright \xi_\lambda = \delta_{\mu\nu} \xi_\lambda, \tag{5.140}$$

$$S^2_{\mu\nu} \blacktriangleright X_\lambda = 0, \tag{5.141}$$

$$S^2_{\mu\nu} \blacktriangleright \xi_\lambda = K_{\lambda\mu\nu}, \tag{5.142}$$

$$S^3_{\mu\nu} \blacktriangleright X_\lambda = 0, \tag{5.143}$$

$$S^3_{\mu\nu} \blacktriangleright \xi_\lambda = 0, \tag{5.144}$$

$$S^4_{\mu\nu} \blacktriangleright X_\lambda = \delta_{\mu\nu} X_\lambda - K_{\mu\lambda\nu}, \tag{5.145}$$

$$S^4_{\mu\nu} \blacktriangleright \xi_\lambda = \delta_{\mu\nu} \xi_\lambda. \tag{5.146}$$

Da bi dokazali formulu za djelovanje (5.137) dokazat ćemo prvo sljedeće tvrdnje za svaki $f, g \in U(\mathfrak{g})$.

Tvrdnja 1.

$$S^1_{\mu\nu} \blacktriangleright (fg) = \sum_{\lambda=1}^{n} (S^1_{\lambda\nu} \blacktriangleright f)(S^1_{\mu\lambda} \blacktriangleright g). \tag{5.147}$$

Tvrdnja 2.

$$S^2_{\mu\nu} \blacktriangleright (fg) = \sum_{\lambda=1}^{n} (S^2_{\lambda\nu} \blacktriangleright f)(S^1_{\mu\lambda} \blacktriangleright g) + (-1)^{|f||S^2_{\mu\beta}|} \sum_{\beta=1}^{m} (S^4_{\beta\nu} \blacktriangleright f)(S^2_{\mu\beta} \blacktriangleright g). \tag{5.148}$$

Tvrdnja 3.

$$S^3_{\mu\nu} \blacktriangleright (fg) = 0. \tag{5.149}$$

Tvrdnja 4.

$$S^4_{\mu\nu} \blacktriangleright (fg) = \sum_{\lambda=1}^{n} (S^4_{\lambda\nu} \blacktriangleright f)(S^4_{\mu\lambda} \blacktriangleright g).. \tag{5.150}$$

Po analogiji s prethodnim teoremom dokaze tvrdnji ćemo provoditi indukcijom po stupnju monoma $f \in U(\mathfrak{g})$, dok je $g \in U(\mathfrak{g})$ monom proizvoljnog stupnja. Za $n = 1$ iz formule (5.87) i relacije (5.134) slijedi

$$\begin{aligned} S^1_{\mu\nu} \blacktriangleright (X_\lambda g) &= -\sum_{\alpha=1}^{n} C_{\alpha\lambda\nu}(S^1_{\mu\alpha} \blacktriangleright g) + X_\lambda(S^1_{\mu\nu} \blacktriangleright g) \\ &= \sum_{\alpha=1}^{n} (-C_{\alpha\lambda\nu} + \delta_{\nu\alpha}X_\lambda)(S^1_{\mu\alpha} \blacktriangleright g) = \sum_{\alpha=1}^{n} (S^1_{\alpha\nu} \blacktriangleright X_\lambda)(S^1_{\mu\alpha} \blacktriangleright g), \end{aligned} \tag{5.151}$$

te

$$\begin{aligned} S^1_{\mu\nu} \blacktriangleright (\xi_\lambda g) &= \sum_{\alpha=1}^{n} (\delta_{\nu\alpha}\xi_\lambda)(S^1_{\mu\alpha} \blacktriangleright g) \\ &= \sum_{\alpha=1}^{n} (S^1_{\alpha\nu} \blacktriangleright \xi_\lambda)(S^1_{\mu\alpha} \blacktriangleright g), \end{aligned} \tag{5.152}$$

čime smo dokazali slučaj $n = 1$. U koraku indukcije pretpostavimo da relacija (5.147) vrijedi za sve monome f stupnja k. Tada je za monome stupnja $k + 1$

$$\begin{aligned} S^1_{\mu\nu} \blacktriangleright ((Z_\lambda f)g) &= \sum_{\alpha=1}^{n} (S^1_{\alpha\nu} \blacktriangleright Z_\lambda)(S^1_{\mu\alpha} \blacktriangleright (fg)) \\ &= \sum_{\beta=1}^{n} \Big(\sum_{\alpha=1}^{n} (S^1_{\alpha\nu} \blacktriangleright Z_\lambda)(S^1_{\beta\alpha} \blacktriangleright f) \Big) (S^1_{\mu\beta} \blacktriangleright g)) = \sum_{\beta=1}^{n} (S^1_{\beta\nu} \blacktriangleright (Z_\lambda f))(S^1_{\mu\beta} \blacktriangleright g), \end{aligned} \tag{5.153}$$

čime smo dokazali da relacija (5.147) vrijedi za sve monome f iz $U(\mathfrak{g})$ te je linearno možemo proširiti na sve elemente iz $U(\mathfrak{g})$.

Tvrdnja (5.149) slijedi trivijalno iz (5.143) i (5.144). Tvrdnja (5.150) proizlazi iz

(5.87) i (5.134), tj. vrijedi

$$\begin{aligned} S^4_{\mu\nu} \blacktriangleright (X_\lambda g) &= -\sum_{\alpha=1}^{m} K_{\alpha\lambda\nu}(S^4_{\mu\alpha} \blacktriangleright g) + X_\lambda (S^4_{\mu\nu} \blacktriangleright g) \\ &= \sum_{\alpha=1}^{m}(-K_{\alpha\lambda\nu} + \delta_{\nu\alpha}X_\lambda)(S^1_{\mu\alpha} \blacktriangleright g) = \sum_{\alpha=1}^{m}(S^4_{\alpha\nu} \blacktriangleright X_\lambda)(S^4_{\mu\alpha} \blacktriangleright g), \end{aligned} \tag{5.154}$$

i

$$\begin{aligned} S^4_{\mu\nu} \blacktriangleright (\xi_\lambda g) &= \sum_{\alpha=1}^{m}(\delta_{\nu\alpha}\xi_\lambda)(S^4_{\mu\alpha} \blacktriangleright g) \\ &= \sum_{\alpha=1}^{m}(S^1_{\alpha\nu} \blacktriangleright \xi_\lambda)(S^4_{\mu\alpha} \blacktriangleright g). \end{aligned} \tag{5.155}$$

U koraku indukcije pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za monome f stupnja k. Tada je

$$\begin{aligned} S^4_{\mu\nu} \blacktriangleright ((Z_\lambda f)g) &= \sum_{\alpha=1}^{m}(S^4_{\alpha\nu} \blacktriangleright Z_\lambda)(S^4_{\mu\alpha} \blacktriangleright (fg)) \\ &= \sum_{\beta=1}^{n}\Big(\sum_{\alpha=1}^{n}(S^4_{\alpha\nu} \blacktriangleright Z_\lambda)(S^4_{\beta\alpha} \blacktriangleright f)\Big)(S^4_{\mu\beta} \blacktriangleright g) = \sum_{\beta=1}^{n}(S^4_{\beta\nu} \blacktriangleright (Z_\lambda f))(S^4_{\mu\beta} \blacktriangleright g). \end{aligned} \tag{5.156}$$

Pokažimo sada tvrdnju (5.148). Iz (5.87) i (5.134) slijedi

$$\begin{aligned} S^2_{\mu\nu} \blacktriangleright (X_\lambda g) &= -\sum_{\alpha=1}^{m} K_{\alpha\lambda\nu}(S^2_{\mu\alpha} \blacktriangleright g) + X_\lambda (S^2_{\mu\nu} \blacktriangleright g) \\ &= \sum_{\alpha=1}^{m}(\delta_{\alpha\nu}X_\lambda - K_{\alpha\lambda\nu})(S^2_{\mu\alpha} \blacktriangleright g) = \sum_{\alpha=1}^{m}(S^4_{\alpha\nu} \blacktriangleright X_\lambda)(S^2_{\mu\alpha} \blacktriangleright g) \end{aligned} \tag{5.157}$$

i

$$\begin{aligned} S^2_{\mu\nu} \blacktriangleright (\xi_\lambda g) &= \sum_{\alpha=1}^{n} K_{\lambda\alpha\nu}(S^1_{\mu\alpha} \blacktriangleright g) - \xi_\lambda (S^2_{\mu\nu} \blacktriangleright g) \\ &= \sum_{\alpha=1}^{n}(S^2_{\alpha\nu} \blacktriangleright \xi_\lambda)(S^1_{\mu\alpha} \blacktriangleright g) - \sum_{\beta=1}^{m}(S^4_{\beta\nu} \blacktriangleright \xi_\lambda)(S^2_{\mu\beta} \blacktriangleright g). \end{aligned} \tag{5.158}$$

Pretpostavimo sada da tvrdnja vrijedi za sve monome $f \in U(\mathfrak{g})$ stupnja k. Iz prethodno dokazanog te iz tvrdnji (5.147), (5.150) i pretpostavke indukcije slijedi da je

$$\begin{aligned}
S^2_{\mu\nu} \blacktriangleright (Z_\lambda f g) &= \sum_{\alpha=1}^{n} (S^2_{\alpha\nu} \blacktriangleright Z_\lambda)(S^1_{\mu\alpha} \blacktriangleright (fg)) + (-1)^{|f||S^2_{\mu\beta}|} \sum_{\beta=1}^{m} (S^4_{\beta\nu} \blacktriangleright Z_\lambda)(S^2_{\mu\beta} \blacktriangleright (fg)) \\
&= \sum_{\rho=1}^{n} ((S^2_{\alpha\nu} \blacktriangleright Z_\lambda)(S^1_{\rho\alpha} \blacktriangleright f)(S^1_{\mu\rho} \blacktriangleright g) \\
&+ (-1)^{|f||S^2_{\delta\beta}|} \sum_{\delta=1}^{n} \Big(\sum_{\beta=1}^{m} (S^4_{\beta\nu} \blacktriangleright Z_\lambda)(S^2_{\delta\beta} \blacktriangleright f) \Big) (S^1_{\mu\delta} \blacktriangleright g) \\
&+ (-1)^{|f||S^2_{\mu\beta}|} \sum_{\gamma=1}^{m} (-1)^{|f||S^2_{\mu\gamma}|} (S^4_{\beta\nu} \blacktriangleright Z_\lambda)(S^4_{\gamma\beta} \blacktriangleright f))(S^2_{\mu\gamma} \blacktriangleright g) \\
&= \sum_{\delta=1}^{n} (S^2_{\delta\nu} \blacktriangleright (Z_\lambda f))(S^1_{\mu\delta} \blacktriangleright g) + (-1)^{|f||S^2_{\mu\beta}|} \sum_{\gamma=1}^{m} (S^4_{\gamma\nu} \blacktriangleright (Z_\lambda f))(S^2_{\mu\gamma} \blacktriangleright g).
\end{aligned} \tag{5.159}$$

Lako se pokaže da relacija (5.137) slijedi iz tvrdnji (5.147)-(5.150). ■

Lema 5.2 *Neka je $f = X_1^{k_1} \cdots X_n^{k_n} \in U(\mathfrak{g}_0)$ monom u varijabli X_λ. Tada vrijedi*

$$f Z_\lambda = \sum_{\rho=1}^{n+m} Z_\rho (S_{\lambda\rho} \blacktriangleright f), \tag{5.160}$$

$\forall f = X_1^{k_1} \cdots X_n^{k_n} \in U(\mathfrak{g}_0),\ \forall Z_\lambda = X_\lambda,\ Z_{\lambda+n} = \xi_\lambda.$

Dokaz

Dokaz provodimo indukcijom po stupnju monoma $f \in U(\mathfrak{g}_0)$. Neka je $f = X_\alpha$. Tada iz komutacijskih relacija (5.40) i (5.139) slijedi

$$\begin{aligned}
X_\alpha X_\lambda = X_\lambda X_\alpha - \sum_{\rho=1}^{n} C_{\lambda\alpha\rho} X_\rho &= \sum_{\rho=1}^{n} X_\rho (\delta_{\lambda\rho} X_\alpha - C_{\lambda\alpha\rho}) \\
= \sum_{\rho=1}^{n} X_\rho (S^1_{\lambda\rho} \blacktriangleright X_\alpha) &= \sum_{\rho=1}^{n+m} X_\rho (S_{\lambda\rho} \blacktriangleright X_\alpha),
\end{aligned} \tag{5.161}$$

dok relacije (5.40) i (5.145) povlače

$$\begin{aligned} X_\alpha \xi_\lambda &= \xi_\lambda X_\alpha - \sum_{\rho=1}^{m} K_{\lambda\alpha\rho}\xi_\rho = \sum_{\rho=1}^{n} \xi_\rho(\delta_{\lambda\rho}X_\alpha - K_{\lambda\alpha\rho}) \\ &= \sum_{\rho=1}^{n} \xi_\rho(S^4_{\lambda\rho} \blacktriangleright X_\alpha) = \sum_{\rho=1}^{n+m} \xi_\rho(S_{\lambda\rho} \blacktriangleright X_\alpha). \end{aligned} \tag{5.162}$$

Time smo tvrdnju dokazali za sve monome $f = X_\alpha \in U(\mathfrak{g}_0)$ stupnja jedan. Pretpostavimo sada da tvrdnja (5.160) vrijedi za sve monome $f = X_1^{k_1} \cdots X_n^{k_n} \in U(\mathfrak{g}_0)$ stupnja k. Sada je

$$\begin{aligned} f(X_\alpha Z_\lambda) &= f\Big(\sum_{\rho=1}^{n+m} Z_\rho(S_{\lambda\rho} \blacktriangleright X_\alpha\Big) \\ &= \sum_{\rho=1}^{n+m} (fZ_\rho)(S_{\lambda\rho} \blacktriangleright X_\alpha) \\ &= \sum_{\rho=1}^{n+m}\sum_{\beta=1}^{n+m} Z_\beta(S_{\rho\beta} \blacktriangleright f)(S_{\lambda\rho} \blacktriangleright X_\alpha) = \sum_{\beta=1}^{n+m} Z_\beta(S_{\lambda\beta} \blacktriangleright (fX_\alpha)). \end{aligned} \tag{5.163}$$

■

Analagno kao i u drugom poglavlju algebre $U(\mathfrak{g}^L)$ i $U(\mathfrak{g}^R)$ možemo uložiti u unitalnu asocijativnu algebru generiranu sa $\{Z_\lambda, T_{\mu\nu}, S_{\mu\nu} \mid \lambda, \mu, \nu = 1, 2, \ldots, n+m\}$ u kojoj vrijedi

$$\sum_{\alpha=1}^{n+m} T_{\mu\alpha}S_{\alpha\nu} = \sum_{\alpha=1}^{n+m} S_{\mu\alpha}T_{\alpha\nu} = \delta_{\mu\nu}. \tag{5.164}$$

5.6 Realizacija Liejeve superalgebre $\mathfrak{g}$

Neka je $A_{n,m}$ Clifford-Weylova superalgebra generirana bazom $\{z_i, D_j \mid i,j = 1 \ldots n + m\}$, gdje je $z_i = x_i,\ i = 1, \ldots, n,\ z_{i+n} = \theta_i,\ i = 1, \ldots, m$ i $D_j = \partial_j,\ j = 1, \ldots, n$, $D_{j+n} = q_j,\ j = 1, \ldots, m$. Stupnjeve generatora definiramo sa:

$$|x_\mu| = |\partial_\mu| = 0 \tag{5.165}$$

$$|\theta_\mu| = |q_\mu| = 1. \tag{5.166}$$

Komutacijske relacije među generatorima su dane sljedećim superkomutatorima:

$$[x_i, x_j] = [\partial_i, \partial_j] = 0,\ [\partial_i, x_j] = \delta_{ij}, \tag{5.167}$$

$$[\theta_i, \theta_j] = [q_i, q_j] = 0,\ [\theta_i, q_j] = \delta_{ij}, \tag{5.168}$$

$$[x_i, \theta_j] = [x_i, q_j] = [\partial_i, \theta_j] = [\partial_i, q_j] = 0, \tag{5.169}$$

gdje je superkomutator definiran sa $[a, b] = ab - (-1)^{|a||b|}ba,\ \forall a, b \in A_{n,m}$. Neka je sa $\hat{A}_{n,m}$ označeno upotpunjenje Clifford-Weylove superalgebre $A_{n,m}$ s obzirom na stupanj diferencijalnog operatora $D_\mu,\ \mu = 1, 2, \ldots, n+m$.

Teorem 5.4 *Realizacija Liejeve superalgebre* $\mathfrak{g}$ *definirane sa* (5.34) − (5.36) *je monomorfizam Liejevih superalgebri* $\varphi\colon \mathfrak{g} \to \hat{A}_{n,m}$ *definiran na elementima baze sa*

$$\varphi(X_\mu) = \sum_{\alpha=1}^{n} x_\alpha \psi(\mathbf{C})_{\mu\alpha} - \sum_{\gamma=1}^{m}\sum_{\delta=1}^{m} K_{\delta\mu\gamma}\theta_\gamma q_\delta \tag{5.170}$$

$$\varphi(\xi_\mu) = \theta_\mu, \tag{5.171}$$

gdje je gdje $\psi_{\mu\alpha}(\mathbf{C})$ *oznčava* (μ, α)*-ti element matrice*

$$\psi(\mathbf{C}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} B_k \mathbf{C}^k, \tag{5.172}$$

a $\mathbf{C} = [\mathbf{C}_{\mu\nu}]$ *je* $n \times n$ *matrica diferencijalnih operatora u kojoj su elementi dani sa* $\mathbf{C}_{\mu\nu} = \sum_{\alpha=1}^{n} C_{\mu\alpha\nu}\partial_\alpha$.

Dokaz Da bi dokazali teorem trebamo provjeriti da vrijede relacije

$$[\varphi(X_\mu), \varphi(X_\nu)] = \sum_{\alpha=1}^{n} C_{\mu\nu\alpha}\varphi(X_\alpha), \tag{5.173}$$

$$[\varphi(\xi_\mu), \varphi(\xi_\nu)] = 0, \tag{5.174}$$

$$[\varphi(\xi_\mu), \varphi(X_\nu)] = \sum_{\alpha=1}^{n} K_{\mu\nu\alpha}\varphi(\xi_\alpha). \tag{5.175}$$

Promotrimo prvo sljedeću relaciju

$$
\begin{aligned}
&[\varphi(X_\mu), \varphi(X_\nu)] \\
&= \Big[\sum_{\alpha=1}^{n} x_\alpha \psi(\mathbf{C})_{\mu\alpha} - \sum_{\gamma=1}^{m}\sum_{\delta=1}^{m} K_{\delta\mu\gamma}\theta_\gamma q_\delta, \sum_{\beta=1}^{n} x_\beta \psi(\mathbf{C})_{\nu\beta} - \sum_{\kappa=1}^{m}\sum_{\rho=1}^{m} K_{\rho\nu\kappa}\theta_\kappa q_\rho\Big] \\
&= \Big[\sum_{\alpha=1}^{n} x_\alpha \psi(\mathbf{C})_{\mu\alpha}, \sum_{\beta=1}^{n} x_\beta \psi(\mathbf{C})_{\nu\beta}\Big] + \Big[\sum_{\gamma=1}^{m}\sum_{\delta=1}^{m} K_{\delta\mu\gamma}\theta_\gamma q_\delta, \sum_{\kappa=1}^{m}\sum_{\rho=1}^{m} K_{\rho\nu\kappa}\theta_\kappa q_\rho\Big].
\end{aligned}
\tag{5.176}
$$

Prvi član slijedi iz teorema (3.1) tj. imamo da je

$$
\Big[\sum_{\alpha=1}^{n} x_\alpha \psi(\mathbf{C})_{\mu\alpha}, \sum_{\beta=1}^{n} x_\beta \psi(\mathbf{C})_{\nu\beta}\Big] = \sum_{\lambda=1}^{n} C_{\mu\nu\lambda}\Big(\sum_{\epsilon=1}^{n} x_\epsilon \psi(\mathbf{C})_{\mu\epsilon}\Big). \tag{5.177}
$$

Za drugi član koristeći Leibnizovo pravilo i relacije (5.167)-(5.169) slijedi

$$
[\theta_\gamma q_\delta, \theta_\kappa q_\rho] = [\theta_\gamma q_\delta, \theta_\kappa] q_\rho + \theta_\kappa[\theta_\gamma q_\delta, q_\rho] = \delta_{\delta\kappa}\theta_\gamma q_\rho - \delta_{\gamma\rho}\theta_\kappa q_\delta. \tag{5.178}
$$

Sada imamo da je

$$
\begin{aligned}
&\Big[\sum_{\gamma=1}^{m}\sum_{\delta=1}^{m} K_{\delta\mu\gamma}\theta_\gamma q_\delta, \sum_{\kappa=1}^{m}\sum_{\rho=1}^{m} K_{\rho\nu\kappa}\theta_\kappa q_\rho\Big] \\
&= \sum_{\gamma=1}^{m}\sum_{\rho=1}^{m}\sum_{\kappa=1}^{m} (K_{\rho\nu\kappa}K_{\kappa\mu\gamma} - K_{\rho\mu\kappa}K_{\kappa\nu\gamma})\theta_\gamma q_\rho \\
&= \sum_{\gamma=1}^{m}\sum_{\rho=1}^{m}\Big(-\sum_{\lambda=1}^{n} C_{\mu\nu\lambda}K_{\rho\lambda\gamma}\theta_\gamma q_\rho\Big),
\end{aligned}
\tag{5.179}
$$

gdje se u zadnjoj relaciji korisiti Jacobijev identitet (5.38). Konačno je

$$
[\varphi(X_\mu), \varphi(X_\nu)] = \sum_{\lambda=1}^{n} C_{\mu\nu\lambda}\Big(\sum_{\epsilon}^{n} x_\epsilon \psi(\mathbf{C})_{\mu\epsilon} - \sum_{\gamma=1}^{m}\sum_{\rho=1}^{m} K_{\rho\lambda\gamma}\theta_\gamma q_\rho\Big) = \sum_{\lambda=1}^{n} C_{\mu\nu\lambda}\varphi(X_\lambda).
$$

Nadalje,

$$
\begin{aligned}
[\varphi(\xi_\nu), \varphi(X_\mu)] &= \Big[\theta_\nu, \sum_{\alpha=1}^{n} x_\alpha \psi(\mathbf{C})_{\mu\alpha} - \sum_{\gamma=1}^{m}\sum_{\delta=1}^{m} K_{\delta\mu\gamma}\theta_\gamma q_\delta\Big] \\
&= \Big[\theta_\nu, \sum_{\gamma=1}^{m}\sum_{\delta=1}^{m} K_{\delta\mu\gamma}\theta_\gamma q_\delta\Big] = \sum_{\gamma=1}^{m}\sum_{\delta=1}^{m} K_{\delta\mu\gamma}\theta_\gamma\delta_{\delta\nu} = \sum_{\gamma=1}^{m} K_{\nu\mu\gamma}\varphi(\xi_\gamma),
\end{aligned}
$$

dok je

$$[\varphi(\xi_\mu), \varphi(\xi_\mu)] = [\theta_\mu, \theta_\nu] = 0. \tag{5.180}$$

■

Neka je $\mathfrak{g}^L$ proširenje Liejeve superalgebre $\mathfrak{g}$ Abelovom familijom generatora $\{T_{\mu\nu} \mid 1 \leq \mu, \nu \leq n+m\}$ za koje vrijede relacije (5.47) i (5.48). U proučavanju realizacija algebre $\mathfrak{g}^L$ korisno je uvesti sljedeće oznake:

$$T^1_{\mu\nu} = T_{\mu\nu}, \quad 1 \leq \mu, \nu \leq n, \tag{5.181}$$

$$T^2_{\mu\nu} = T_{\mu(n+\nu)}, \quad 1 \leq \mu \leq n,\ 1 \leq \nu \leq m, \tag{5.182}$$

$$T^3_{\mu\nu} = T_{(n+\mu)\nu}, \quad 1 \leq \mu \leq m,\ 1 \leq \nu \leq n, \tag{5.183}$$

$$T^4_{\mu\nu} = T_{(n+\mu)(n+\nu)}, \quad 1 \leq \mu, \nu \leq m. \tag{5.184}$$

Kao i u prvom poglavlju promatrat ćemo ulaganja superalgebre $\mathfrak{g}^L$ u superalgebru $\hat{A}_{n,m}$. Da bi dokazali teorem koji nam daje takve realizacije potrebno je dokazati sljedeći tehnički rezultat:

Lema 5.3 *Neka je $\mathbf{C} = [\mathbf{C}_{\mu\nu}]$ $n \times n$ matrica diferencijalnih operatora u kojoj su elementi dani sa $\mathbf{C}_{\mu\nu} = \sum_{\alpha=1}^{n} C_{\mu\alpha\nu}\partial_\alpha$ i neka je $\mathbf{K} = [\mathbf{K}_{\mu\nu}]$ $m \times m$ je matrica diferencijalnih operatora definiranih sa $\mathbf{K}_{\mu\nu} = \sum_{\alpha=1}^{m} K_{\mu\alpha\nu}\partial_\alpha$. Tada vrijedi da je*

$$\sum_{\alpha=1}^{n} \frac{\partial}{\partial\partial_\alpha}(e^{\mathbf{K}})_{\mu\nu}\, \psi(\mathbf{C})_{\lambda\alpha} = \sum_{\kappa=1}^{m} K_{\mu\lambda\kappa}(e^{\mathbf{K}})_{\kappa\nu}. \tag{5.185}$$

Dokaz

Pomnožit ćemo prvo relaciju (5.185) sa ∂_ρ i sumirati po ρ čime dobijamo

$$\sum_{\rho=1}^{n}\sum_{\alpha=1}^{n} \frac{\partial}{\partial\partial_\alpha}(e^{\mathbf{K}})_{\mu\nu}\psi(\mathbf{C})_{\rho\alpha}\partial_\rho = \sum_{\rho=1}^{n}\sum_{\kappa=1}^{m} K_{\mu\rho\kappa}(e^{\mathbf{K}})_{\kappa\nu}\partial_\rho. \tag{5.186}$$

Iz antisimetričnosti strukturnih konstanti $C_{\mu\nu\alpha}$ slijedi da je

$$\sum_{\rho=1}^{n} \psi(\mathbf{C})_{\rho\alpha}\partial_\rho = \partial_\alpha \tag{5.187}$$

pa jednadžba (5.186) poprima jednostavniji oblik

$$\sum_{\alpha=1}^{n} \frac{\partial}{\partial\partial_\alpha}(e^{\mathbf{K}})_{\mu\nu}\partial_\alpha = \sum_{\rho=1}^{n}\sum_{\kappa=1}^{m} K_{\mu\rho\kappa}(e^{\mathbf{K}})_{\kappa\nu}\partial_\rho. \tag{5.188}$$

Da bi dokazali tvrdnju, pokazat ćemo da formalna diferencijalna jednadžba

$$\sum_{\alpha=1}^{n} \frac{\partial}{\partial\partial_\alpha}(F_{\mu\nu}(\partial))\partial_\alpha = \sum_{\kappa=1}^{m}(\mathbf{K})_{\mu\kappa}F_{\kappa\nu}, \tag{5.189}$$

za nepoznate funkcije $F_{\mu\nu}(\partial)$ uz početni uvjet $F_{\mu\nu}(0) = \delta_{\mu\nu}$ ima jedinstveno rješenje $F_{\mu\nu}(\partial) = (e^{\mathbf{K}})_{\mu\nu}$. Promotrimo diferencijalnu jednadžbu

$$\frac{d}{d\lambda}F_\mu(\lambda\partial) = \sum_{\kappa=1}^{m}(\mathbf{K})_{\mu\kappa}F_{\kappa\nu}(\lambda\partial).\ \lambda \in \mathbb{R}, \tag{5.190}$$

Deriviranjem po λ i uvrštavanjem za $\lambda = 1$ se pokaže da $F_{\mu\nu}(\partial)$ zadovoljava jednadžbu (5.189). Promatrajmo funkciju $F_\mu(\lambda\partial)$ u obliku

$$F_{\mu\nu}(\lambda\partial) = \sum_{k=0}^{\infty} F^k_{\mu\nu}(\partial)\lambda^k,\ \lambda \in \mathbb{R}. \tag{5.191}$$

Iz početnog uvjeta $F_{\mu\nu}(0) = \delta_{\mu\nu}$ slijedi da je $F^0_{\mu\nu}(\partial) = \delta_{\mu\nu}$, a iz (5.190) dobivamo rekurzijske relacije za $F^k_\mu(\partial)$:

$$F^1_{\mu\nu}(\partial) = \mathbf{K}_{\mu\nu}, \tag{5.192}$$

$$F^{k+1}_{\mu\nu}(\partial) = \frac{1}{(k+1)!}\sum_{\kappa=1}^{m}\mathbf{K}_{\mu\kappa}F^k_{\kappa\nu},\ k \geq 1. \tag{5.193}$$

Iz rekurzivnih relacija slijedi da je

$$F^k_{\mu\nu}(\partial) = \frac{1}{(k)!}(\mathbf{K}^k)_{\mu\nu} \tag{5.194}$$

pa uvrštavajući (5.194) u (5.191) dobivamo

$$F_{\mu\nu}(\partial) = (e^{\mathbf{K}})_{\mu\nu}, \tag{5.195}$$

čime smo dokazali tvrdnju. ■

U daljnjem tekstu ćemo uzeti da je $T^3_{\mu\nu} = 0$, dok svi prethodni rezultati vrijede za proizvoljan izbor $T^3_{\mu\nu}$.

Teorem 5.5 *Neka je* $\mathfrak{g}^L$ *Liejeva superalgebra generirana bazom* $\{Z_\lambda, T_{\mu\nu} \mid \lambda, \mu, \nu = 1, 2, \ldots, n+m\}$ *čiji elementi zadovoljavaju relacije* (5.40), (5.47) *i* (5.48). *Realizacija Liejeve superalgebre* $\mathfrak{g}^L$ *je monomorfizam Liejevih superalgebri* $\varphi\colon \mathfrak{g}^L \to \hat{A}_{n,m}$ *definiran na elementima baze sa* (5.170), (5.171) *i*

$$\varphi(T^1_{\mu\nu}) = (e^{\mathbf{C}})_{\mu\nu} \tag{5.196}$$

$$\varphi(T^2_{\mu\nu}) = -\sum_{\kappa=1}^{m}\sum_{\rho=1}^{m} K_{\rho\mu\kappa}(e^{\mathbf{K}})_{\kappa\nu}q_\rho, \tag{5.197}$$

$$\varphi(T^4_{\mu\nu}) = (e^{\mathbf{K}})_{\mu\nu}, \tag{5.198}$$

gdje je $\mathbf{C} = [\mathbf{C}_{\mu\nu}]$ $n \times n$ *matrica diferencijalnih operatora* $\mathbf{C}_{\mu\nu} = \sum_{\alpha=1}^{n} C_{\mu\alpha\nu}\partial_\alpha$, *a* $\mathbf{K} = [\mathbf{K}_{\mu\nu}]$ $m \times m$ *je matrica diferencijalnih definiranih sa* $\mathbf{K}_{\mu\nu} = \sum_{\alpha=1}^{m} K_{\mu\alpha\nu}\partial_\alpha$.

Dokaz

Da bi dokazali teorem dovoljno je još pokazati da vrijede sljedeće relacije:

$$[\varphi(T^1_{\mu\nu}), \varphi(X_\lambda)] = \sum_{\alpha=1}^{n} C_{\mu\lambda\alpha}\varphi(T^1_{\alpha\nu}), \tag{5.199}$$

$$[\varphi(T^1_{\mu\nu}), \varphi(\xi_\lambda)] = 0, \tag{5.200}$$

$$[\varphi(T^2_{\mu\nu}), \varphi(X_\lambda)] = \sum_{\alpha=1}^{n} C_{\mu\lambda\alpha}\varphi(T^2_{\alpha\nu}), \tag{5.201}$$

$$[\varphi(T^2_{\mu\nu}), \varphi(\xi_\lambda)] = -\sum_{\alpha=1}^{m} K_{\lambda\mu\alpha}\varphi(T^4_{\alpha\nu}), \tag{5.202}$$

$$[\varphi(T^4_{\mu\nu}), \varphi(X_\lambda)] = \sum_{\alpha=1}^{m} K_{\mu\lambda\alpha}\varphi(T^4_{\alpha\nu}), \tag{5.203}$$

$$[\varphi(T^4_{\mu\nu}), \varphi(\xi_\lambda)] = 0. \tag{5.204}$$

Za relaciju (5.199) iz teorema (3.1) slijedi da je

$$\begin{aligned}
[\varphi(T^1_{\mu\nu}), \varphi(X_\lambda)] &= \left[(e^{\mathbf{C}})_{\mu\nu}, \sum_{\alpha=1}^{n} x_\alpha\psi(\mathbf{C})_{\lambda\alpha} - \sum_{\gamma=1}^{m}\sum_{\delta=1}^{m} K_{\delta\lambda\gamma}\theta_\gamma q_\delta\right] \\
&= \left[(e^{\mathbf{C}})_{\mu\nu}, \sum_{\alpha=1}^{n} x_\alpha\psi(\mathbf{C})_{\lambda\alpha}\right] = \sum_{\alpha=1}^{n} C_{\mu\lambda\alpha}\varphi(T^1_{\alpha\nu}),
\end{aligned}$$

dok je

$$[\varphi(T^1_{\mu\nu}), \varphi(\xi_\lambda)] = [(e^{\mathbf{C}})_{\mu\nu}, \theta_\lambda] = 0. \tag{5.205}$$

Da bi dokazali relaciju (5.203) koristimo lemu (5.3), tj. relaciju

$$\sum_{\alpha=1}^{n} \frac{\partial}{\partial \partial_\alpha} (e^{\mathbf{K}})_{\mu\nu} \psi(\mathbf{C})_{\lambda\alpha} = \sum_{\kappa=1}^{m} K_{\mu\lambda\kappa} (e^{\mathbf{K}})_{\kappa\nu}. \tag{5.206}$$

Sada iz (5.167)-(5.169) i (5.206) slijedi da je

$$\begin{aligned}
[\varphi(T^4_{\mu\nu}), \varphi(X_\lambda)] &= \Big[(e^{\mathbf{K}})_{\mu\nu}, \sum_{\alpha=1}^{n} x_\alpha \psi(\mathbf{C})_{\lambda\alpha} - \sum_{\gamma=1}^{m}\sum_{\delta=1}^{m} K_{\delta\lambda\gamma}\theta_\gamma q_\delta\Big] \\
&= \Big[(e^{\mathbf{K}})_{\mu\nu}, \sum_{\alpha=1}^{n} x_\alpha \psi(\mathbf{C})_{\lambda\alpha}\Big] \\
&= \sum_{\alpha=1}^{n} \frac{\partial}{\partial \partial_\alpha} (e^{\mathbf{K}})_{\mu\nu} \psi(\mathbf{C})_{\lambda\alpha} = \sum_{\kappa=1}^{m} K_{\mu\lambda\kappa} \varphi(T^4_{\kappa\nu}).
\end{aligned} \tag{5.207}$$

Očigledno je

$$[\varphi(T^4_{\mu\nu}), \varphi(\theta_\lambda)] = [(e^{\mathbf{K}})_{\mu\nu}, \theta_\lambda] = 0. \tag{5.208}$$

Za relaciju (5.201) imamo da je

$$\Big[\varphi(T^2_{\mu\nu}), \varphi(X_\lambda)\Big] = \Big[- \sum_{\kappa=1}^{m}\sum_{\rho=1}^{m} K_{\rho\mu\kappa}(e^{\mathbf{K}})_{\kappa\nu} q_\rho, \sum_{\alpha=1}^{n} x_\alpha \psi(\mathbf{C})_{\lambda\alpha} - \sum_{\gamma=1}^{m}\sum_{\delta=1}^{m} K_{\delta\lambda\gamma}\theta_\gamma q_\delta\Big]. \tag{5.209}$$

Primijetimo da koristeći Leibnizovo pravilo, relacije (5.167)-(5.169) i rezultat (5.206) imamo:

$$\begin{aligned}
\Big[(e^{\mathbf{K}})_{\kappa\nu} q_\rho, x_\alpha \psi(\mathbf{C})_{\lambda\alpha}\Big] &= \Big[(e^{\mathbf{K}})_{\kappa\nu} q_\rho, x_\alpha\Big] \psi(\mathbf{C})_{\lambda\alpha} \\
= \sum_{\alpha=1}^{n} \Big[(e^{\mathbf{K}})_{\kappa\nu}, x_\alpha\Big] q_\rho \psi(\mathbf{C})_{\lambda\alpha} &= \sum_{\beta=1}^{m} K_{\kappa\lambda\beta} (e^{\mathbf{K}})_{\beta\nu} q_\rho,
\end{aligned} \tag{5.210}$$

i

$$\Big[(e^{\mathbf{K}})_{\kappa\nu} q_\rho, \xi_\gamma q_\delta\Big] = \Big[(e^{\mathbf{K}})_{\kappa\nu} q_\rho, \theta_\gamma\Big] q_\delta = (e^{\mathbf{K}})_{\kappa\nu} \delta_{\rho\gamma} q_\delta. \tag{5.211}$$

Sada koristeći prethodne relacije i Jacobijev identitet (5.38) slijedi da je

$$
\begin{aligned}
[\varphi(T^2_{\mu\nu}), \varphi(X_\lambda)] &= \Big[-\sum_{\kappa=1}^{m}\sum_{\rho=1}^{m} K_{\rho\mu\kappa}(e^{\mathbf{K}})_{\kappa\nu} q_\rho, \sum_{\alpha=1}^{n} x_\alpha \psi(\mathbf{C})_{\lambda\alpha} - \sum_{\gamma=1}^{m}\sum_{\delta=1}^{m} K_{\delta\lambda\gamma}\theta_\gamma q_\delta \Big] \\
&= \sum_{\kappa=1}^{m}\sum_{\rho=1}^{m}\sum_{\beta=1}^{m} (-K_{\rho\mu\kappa}K_{\kappa\lambda\beta} + K_{\rho\lambda\kappa}K_{\kappa\mu\beta})(e^{\mathbf{K}})_{\kappa\nu} q_\rho = \sum_{\alpha=1}^{n} C_{\mu\lambda\alpha}\varphi(T^2_{\alpha\nu}).
\end{aligned}
\tag{5.212}
$$

Konačno, za relaciju (5.202) vrijedi da je

$$
\begin{aligned}
&[\varphi(T^2_{\mu\nu}), \varphi(\xi_\lambda)] = \Big[-\sum_{\kappa=1}^{m}\sum_{\rho=1}^{m} K_{\rho\mu\kappa}(e^{\mathbf{K}})_{\kappa\nu} q_\rho, \theta_\lambda \Big] = -\sum_{\kappa=1}^{m}\sum_{\rho=1}^{m} K_{\rho\mu\kappa}(e^{\mathbf{K}})_{\kappa\nu}[q_\rho, \theta_\lambda] \\
&= -\sum_{\kappa=1}^{m} K_{\lambda\mu\kappa}\varphi(T^4_{\kappa\nu}).
\end{aligned}
$$

■

5.7 Vanjska derivacija

U ovom ćemo odjeljku konstruirati vanjsku derivaciju na omotačkoj algebri $U(\mathfrak{g}_0)$ s obzirom na opće definicije dane na početku poglavlja. Promatrat ćemo slučaj u kojem je superalgebra $\mathfrak{g}$ generirana jednakim brojem jedan-formi ξ_μ i nekomutativnih koordinata X_μ. Neka je $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$ konačnodimenzionalna Liejeva superalgebra nad poljem $\mathbb{C}$. Neka je $\{X_1, \ldots, X_n, \xi_1, \ldots, \xi_n\}$ uređena baza od $\mathfrak{g}$ za čije elemente vrijede sljedeće relacije:

$$[X_\mu, X_\nu] = \sum_{\alpha=1}^{n} C_{\mu\nu\alpha}X_\alpha, \tag{5.213}$$

$$[\xi_\mu, \xi_\nu] = 0, \tag{5.214}$$

$$[\xi_\mu, X_\nu] = \sum_{\alpha=1}^{n} K_{\mu\nu\alpha}\xi_\alpha. \tag{5.215}$$

Označimo sa

$$\Omega = \oplus_{\mu=1}^{n} U(\mathfrak{g}_0)\xi_\mu. \tag{5.216}$$

Iz prethodnog se lako vidi da je vektorski prostor Ω lijevi modul nad $U(\mathfrak{g}_0)$ s bazom $\{\xi_1, \ldots, \xi_n\}$ dok mu struktura bimodula nad $U(\mathfrak{g}_0)$ proizlazi iz relacije (5.215). Uvedimo vanjsku derivaciju $d\colon U(\mathfrak{g}_0) \to \Omega$ sa sljedećim svojstvima:

1. d je linearno preslikavanje,

2. $d(X_\mu) = \xi_\mu$,

3. $d(XY) = d(X)Y + Xd(Y),\ \forall X, Y \in U(\mathfrak{g}_0)$.

Djelovanjem vanjske derivacije d na relaciju (5.213) slijedi

$$[\xi_\mu, X_\nu] - [\xi_\nu, X_\mu] = \sum_{\alpha=1}^{n} C_{\mu\nu\alpha}\xi_\alpha, \tag{5.217}$$

što daje dodatni uvjet za konstante $K_{\mu\nu\alpha}$,

$$K_{\mu\nu\alpha} - K_{\nu\mu\alpha} = C_{\mu\nu\alpha}. \tag{5.218}$$

Na $U(\mathfrak{g}_0)$ imamo standardnu strukturu Hopfove algebre gdje su koprodukt $\Delta\colon U(\mathfrak{g}_0)\otimes U(\mathfrak{g}_0) \to U(\mathfrak{g}_0)$, kojedinica $\epsilon\colon U(\mathfrak{g}_0) \to \mathbb{C}$ i antipoda $S\colon U(\mathfrak{g}_0) \to U(\mathfrak{g}_0)$ definirani na generatorima

1. $\Delta(X_k) = 1 \otimes X_k + X_k \otimes 1$,

2. $\epsilon(X_k) = 0$,

3. $S(X_k) = -X_k,\ \forall k = 1, 2, \ldots, n$.

Nadalje, očito je $U(\mathfrak{g}_0)$ lijevi i desni kvantni prostor nad samim sobom s obzirom na koprodukt Δ. Pokazat ćemo da je diferencijalni račun prvog reda Ω nad kvantnim prostorom $U(\mathfrak{g}_0)$ bikovarijantan. Definirajmo lijevu $\psi_L\colon \Omega \to U(\mathfrak{g}_0) \otimes \Omega$ i desnu $\psi_R\colon \Omega \to \Omega \otimes U(\mathfrak{g}_0)$ koreprezentaciju od $U(\mathfrak{g}_0)$ na Ω sa:

1. $\psi_L(\xi_\mu) = 1 \otimes \xi_\mu$

2. $\psi_L(X\xi_\mu) = \Delta(X)\psi_L(\xi_\mu), \ \forall X\xi_\mu \in \Omega.$

i

1. $\psi_R(\xi_\mu) = \xi_\mu \otimes 1$

2. $\psi_R(X\xi_\mu) = \Delta(X)\psi_R(\xi_\mu), \ \forall X\xi_\mu \in \Omega.$

Prvo ćemo pokazati da je relacija (5.215) u jezgri od ψ_L, tj.

$$\psi_L = \Big([\xi_\mu, X_\nu] - \sum_{\alpha=1}^{n} K_{\mu\nu\alpha}\xi_\alpha\Big) = 0 \tag{5.219}$$

Djelujući sa ψ_L na relaciju (5.215) dobijamo da je

$$\begin{aligned} \psi_L(\xi_\mu X_\nu - X_\nu\xi_\nu) &= \sum_{\alpha=1}^{n} K_{\mu\nu\alpha}\psi_L(\xi_\alpha), \\ 1\otimes\xi_\mu X_\nu + X_\nu\otimes\xi_\mu - 1\otimes X_\nu\xi_\nu - X_\nu\otimes\xi_\mu &= \sum_{\alpha=1}^{n} K_{\mu\nu\alpha}(1\otimes\xi_\alpha), \\ 1\otimes[\xi_\mu, X_\nu] &= 1\otimes(\sum_{\alpha=1}^{n} K_{\mu\nu\alpha}\xi_\alpha). \end{aligned} \tag{5.220}$$

Slično se pokaže i da je (5.215) u jezgri desne koreprezentacije ψ_R kompatibilna s relacijom (5.215). Da bi pokazali da je diferencijalni račun prvog reda Ω bikovarijantan, moramo još provjeriti da vrijedi relacija

$$(id\otimes\psi_R)\circ\psi_L = (\psi_L\otimes id)\circ\psi_R. \tag{5.221}$$

Relaciju je dovoljno provjeriti na elementima $X\xi_\mu \in \Omega, \ \mu = 1,\dots,n$ jer je onda možemo linearno proširiti na sve elemente iz Ω. Djelujući lijevom stranom relacije

(5.221) na elemente $X\xi_\mu$ imamo da je

$$\begin{aligned}(id \otimes \psi_R) \circ \psi_L(X\xi_\mu) &= (id \otimes \psi_R)\Delta(X)\psi_L(\xi_\mu) \\ &= (id \otimes \psi_R)\Big(\sum x_{(1)} \otimes x_{(2)})(1 \otimes \xi_\mu\Big) \\ &= \sum x_{(1)} \otimes \Delta(x_{(2)})\psi_R(\xi_\mu) \\ &= \sum x_{(1)} \otimes \Big(\sum x_{(2)_{(1)}} \otimes x_{(2)_{(2)}}\Big)(\xi_\mu \otimes 1) \\ &= \sum x_{(1)} \otimes x_{(2)_{(1)}}\xi_\mu \otimes x_{(2)_{(2)}}. \end{aligned} \tag{5.222}$$

Slično se pokaže da desna strana relacije (5.221) daje

$$\begin{aligned}(\psi_L \otimes id) \circ \psi_R(X\xi_\mu) &= (\psi_L \otimes id)\Delta(X)\psi_R(\xi_\mu) \\ &= \sum x_{(1)_{(1)}} \otimes x_{(1)_{(2)}}\xi_\mu \otimes x_{(2)} \end{aligned} \tag{5.223}$$

Jednakost izraza (5.222) i (5.223) sada slijedi iz uvjeta koasocijativnosti (5.10).

5.7.1 Realizacija vanjske derivacije

Promatrajmo sada realizaciju vanjske derivacije $d\colon (\mathfrak{g}_0) \to \Omega$ u Weylovoj superalgebri $A_{n,n}$ definiranoj sa (5.167)-(5.169). Realizaciju derivacije $\hat{d}$ definiramo kao linearno preslikavanje $\hat{d}\colon \hat{A}_{n,n} \to \hat{A}_{n,n}$ dano sa

$$\hat{d}(\varphi(X_\mu)) = [\hat{d}_0, \varphi(X_\mu)], \tag{5.224}$$

za neki $\hat{d}_0 \in \hat{A}_{n,n}$. Sada želimo odrediti $\hat{d}_0$ tako da vrijedi $\hat{d}(\varphi(X_\mu)) = \varphi(\xi_\mu)$ tj.

$$[\hat{d}_0, \varphi(X_\mu)] = \varphi(\xi_\mu) = \theta_\mu. \tag{5.225}$$

Motiv za prethodnu definiciju slijedi iz komutativnog slučaja, tj. promatrajući Euklidski prostor gdje vrijedi $d(x_\mu) = [d, x_\mu] = dx_\mu$, a d je oblika $d = \sum_{i=1}^n \partial_i dx_i$. Stoga realizaciju $\hat{d}_0$ tražimo u obliku $\hat{d}_0 = \sum_{\alpha=1}^n \Lambda_\alpha(\partial)\theta_\alpha$, gdje je $\Lambda_\alpha(\partial)$ formalni red u

$\partial_1, \ldots, \partial_n$. Koristeći Leibnizovo pravilo i relacije (5.167)-(5.169) imamo da je

$$\begin{aligned} [\hat{d}_0, \varphi(X_\mu)] &= \Big[\sum_{\alpha=1}^{n} \Lambda_\alpha(\partial)\theta_\alpha, \sum_{\beta=1}^{n} x_\beta \psi(\mathbf{C})_{\mu\beta} - \sum_{\gamma=1}^{n}\sum_{\delta=1}^{n} K_{\delta\mu\gamma}\theta_\gamma q_\delta\Big] \\ &= \Big[\sum_{\alpha=1}^{n} \Lambda_\alpha(\partial)\theta_\alpha, \sum_{\beta=1}^{n} x_\beta\Big]\psi(\mathbf{C})_{\mu\beta} + \sum_{\gamma=1}^{n}\sum_{\delta=1}^{n} K_{\delta\mu\gamma}\Big[\sum_{\alpha=1}^{2n} \Lambda_\alpha(\partial)\theta_\alpha, q_\delta\Big]\theta_\gamma \\ &= \sum_{\alpha=1}^{n}\Big(\sum_{\beta=1}^{n} \frac{\partial \Lambda_\alpha}{\partial \partial_\beta}\psi(\mathbf{C})_{\mu\beta} + \sum_{\beta=1}^{n} K_{\beta\mu\gamma}\Lambda_\beta\Big)\theta_\alpha. \end{aligned} \tag{5.226}$$

Sada iz prethodnog i jednadžbe (5.225) slijedi da Λ_α zadovoljava diferencijalnu jednadžbu

$$\sum_{\beta=1}^{n}\Big(\frac{\partial \Lambda_\alpha}{\partial \partial_\beta}\psi(\mathbf{C})_{\mu\beta} + \sum_{\beta=1}^{n} K_{\beta\mu\gamma}\Lambda_\beta\Big) = \delta_{\mu\alpha}, \tag{5.227}$$

odnosno

$$\sum_{\alpha=1}^{n}\sum_{\beta=1}^{n} \frac{\partial \Lambda_\mu}{\partial \partial_\beta}\psi(\mathbf{C})_{\alpha\beta}\partial_\alpha + \sum_{\alpha=1}^{n}\sum_{\beta=1}^{n} K_{\beta\alpha\mu}\partial_\alpha\Lambda_\beta = \partial_\mu. \tag{5.228}$$

Iz antisimetričnosti strukturnih konstanti $C_{\mu\nu\alpha}$ slijedi da je

$$\sum_{\alpha=1}^{n} \psi(\mathbf{C})_{\alpha\beta}\partial_\alpha = \partial_\beta \tag{5.229}$$

pa jednadžba za Λ_μ poprima jednostavniji oblik

$$\sum_{\beta=1}^{n} \frac{\partial \Lambda_\mu}{\partial \partial_\beta}\partial_\beta + \sum_{\alpha=1}^{n}\sum_{\beta=1}^{n} K_{\beta\alpha\mu}\partial_\alpha\Lambda_\beta = \partial_\mu. \tag{5.230}$$

Da bi riješili jednadžbu (5.230) promatrajmo je u obliku

$$\sum_{\beta=1}^{n} \frac{\partial F_\mu}{\partial \partial_\beta}\partial_\beta + \sum_{\alpha=1}^{n}\sum_{\beta=1}^{n} K_{\beta\alpha\mu}x_\alpha F_\beta = \partial_\mu, \tag{5.231}$$

za nepoznate funkcije $F_\alpha(\partial)$ uz početni uvjet $F_\alpha(0) = 0$. Deriviranjem u točki $\lambda = 1$ se lako pokaže da ako funkcija $F_\mu(\lambda\partial)$ zadovoljava diferencijalnu jednadžbu

$$\frac{d}{d\lambda}F_\mu(\lambda\partial) + \sum_{\alpha=1}^{n}\sum_{\beta=1}^{n} K_{\beta\alpha\mu}\partial_\alpha F_\beta(\lambda\partial) = \partial_\mu,\ \lambda \in \mathbb{R}, \tag{5.232}$$

tada $F_\mu(\partial)$ zadovoljava jednadžbu (5.231). Promatrajmo funkciju $F_\mu(\lambda\partial)$ u obliku

$$F_\mu(\lambda\partial) = \sum_{m=0}^{\infty} F_\mu^m(\partial)\lambda^m, \ \lambda \in \mathbb{R}. \tag{5.233}$$

Iz početnog uvjeta $F_\mu(0) = 0$ slijedi da je $F_\mu^0(\partial) = 0$, a iz (5.232) dobivamo rekurzijske relacije za $F_\mu^m(\partial)$:

$$F_\mu^1(\partial) = \partial_\mu, \tag{5.234}$$

$$F_\mu^{m+1}(\lambda\partial) = -\frac{1}{m+1}\sum_{\alpha=1}^{n} \mathbf{K}_{\alpha\mu} F_\alpha^m(\partial), \ m \geq 1, \tag{5.235}$$

uz oznaku $\mathbf{K}_{\alpha\mu} = \sum_{\beta=1}^{n} K_{\alpha\beta\mu}\partial_\beta$. Iz rekurzivnih relacija dobijamo formulu za $F_\mu^m(\partial)$:

$$F_\mu^m(\partial) = \frac{(-1)^{m-1}}{m!}\sum_{\alpha=1}^{n} (\mathbf{K}^{m-1})_{\alpha\mu}\partial_\alpha, \ m \geq 1. \tag{5.236}$$

Uvrštavajući u (5.233) dobivamo

$$F_\mu(\lambda\partial) = \sum_{\alpha=1}^{n} \left(\frac{1-e^{-\lambda\mathbf{K}}}{\mathbf{K}}\right)_{\alpha\mu} \partial_\alpha, \ \lambda \in \mathbb{R}. \tag{5.237}$$

Iz (5.237) slijedi rješenje jednadžbe (5.230):

$$\Lambda_\mu = \sum_{\alpha=1}^{n} \left(\frac{1-e^{-\mathbf{K}}}{\mathbf{K}}\right)_{\alpha\mu} \partial_\alpha, \tag{5.238}$$

iz čega slijedi da je

$$\hat{d}_0 = \sum_{\mu=1}^{n}\sum_{\alpha=1}^{n} \left(\frac{1-e^{-\mathbf{K}}}{\mathbf{K}}\right)_{\alpha\mu} \partial_\alpha \theta_\mu. \tag{5.239}$$

Bibliografija

[1] S. Doplicher, K. Fredenhagen, J.E. Roberts, The quantum structure of spacetime at the Planck scale and quantum fields, Commun. Math. Phys. 172 (1995) 187-220.

[2] D. Bahns, S. Doplicher, K. Fredenhagen, G.Piacitelli, Quantum geometry on quantum spacetime:distance, area and volume operators, Commun. Math. Phys. 308 (2011) 567-589.

[3] N. Seiberg, E.Witten, String theory and noncommutative geometry, JHEP 09 (1999) 032.

[4] A.Cones, Noncommutative Geometry, Academic Press, 1994.

[5] G. Landi, An introduction to Noncommutative Spaces and Their Geometries, Lecture notes in Physics, Springer-Verlag, 1997.

[6] H.S.Snyder, Quantized space-time, Phys.Rev. 71 (1947) 38-41.

[7] S. Majid, H. Ruegg, Bicrossproduct structure of κ-Poincaré group and noncommutative geometry, Phys.Lett. B 334 (1994) 348-354.

[8] G. Amelino-Camelia G, Relativity in space-times with short-distance structure governed by an observerindependent (Planckian) length scale Int. J. Mod. Phys. D 11(2002) 35-60.

[9] C.R. Nappi, E. Witten, WessZuminoWitten model based on a non-semisimple group, Phy. Rev. Lett. 71 (1993) 3751.

[10] S. Meljanac, S. Krešić, Generalized kappa-deformed spaces, star-products and their realizations, J. Phys.A: Math. Theor. 41 (2008) 235203.

[11] A. Sitarz, Noncommutative differential calculus on the kappa-Minkowski space Phys. Lett. B 349 (1995) 42.

[12] M. Dimitrijević,L. Mller, E. Tsouchnika, Derivatives, forms and vector fields on the kappa-deformed Euclidean space, J. Phys. A: Math. Gen. 37 (2004) 9749.

[13] S. Meljanac, S. Krešić, Noncommutative Differential Forms on the kappa-deformed Space, J. Phys. A: Math. Gen. 42 (2009) 365204.

[14] S.L. Woronowicz, Differential calculus on compact matrix pseudogroups (quantum groups), Communications in Mathematical Physics 122 (1989) 125-170.

[15] C. Gonera,K. Kosiski, P. Malanka, Differential calculi on quantum Minkowski space, J. Math.Phys. 37 (1996) 5820.

[16] S. Meljanac, S. Krešić, R. Štrajn, Differential algebras on kappa-Minkowski space and action of the Lorentz algebra, Int. J. Mod. Phys. A 27 (2012) 1250057.

[17] N. Durov, S. Meljanac, A. Samsarov, Z. Škoda, A universal formula for representing Lie algebra generators as formal power series with coefficients in the Weyl algebra, J. Algebra 309 (2007) 318-359.

[18] S. Meljanac, S. Krešić, M. Stojić, Covariant realizations of kappa-deformed space Eur. Phys. J. C 51 (2007) 229.

[19] Meljanac, M. Stojić, New realizations of Lie algebra Kappa-deformed Euclidean space, Eur. Phys. J. C 47 (2006) 531.

[20] S. Waldman, Quantization Deformation: Observable algebras, States and Representation Theory, Lecture notes for the Kopaonik summer school, 2002.

[21] F. Mercati, A. Sitarz, kappa-Minkowski differential calculi and star product, Proc. Sci. CNCFG2010 (2011) 030.

[22] G. Amelino-Camelia, M. Arzano, Coproduct and star-product in field theories on Lie algebra noncomutative spacetime, Phys. Rev. D 65 (2002) 084044.

[23] Anatoli Klimyk, Konrad Schmdgen, Quantum Groups and Their Representation, Springer, 1997.

[24] P.J. Olver, *Applications of Lie Groups to Differential Equations*, 2nd. ed. (Springer–Verlag, New York, 1998).

[25] L.V. Ovsiannikov, *Group Analysis of Differential Equations* (Academic Press, New York, 1982).

[26] P. Basarab-Horwath, V. Lahno and R. Zhdanov, "The strucutre of Lie algebras and the classification problem for partial differential equations", Acta Appl. Math. **69** (1), 43–94 (2001); e–print arXiv:math–ph/0005013.

[27] Lie S. Gruppenregister, Gesammetle Abhandlungen, Vol. 5, Leipzig, B.G. Teubner, 1924, 767773.

[28] Lie S. Theorie der Transformationsgruppen, Math. Ann., 1880, V.16, 441528; Gesammetle Abhandlungen, Vol. 6, Leipzig, B.G. Teubner, 1927, 194.

[29] Lahno V. and Zhdanov R. Towards a classification of realizations of the Euclid algebra e(3), in Proceedings of Third International Conference Symmetry in Nonlinear Mathematical Physics (1218 July, 1999, Kyiv),Editors A.G. Nikitin and V.M. Boyko, Kyiv, Institute of Mathematics, 2000, V.30, Part 1, 146150.

[30] Zhdanov R.Z., Lahno V.I. and Fushchych W.I. On covariant realizations of the Euclid group, Comm. Math. Phys., 2000, V.212, N 3, 535556.

[31] R. O. Popovych, V. M. Boyko, M. O. Nesterenko, and M. W. Lutfullin, Realizations of real low-dimensional Lie algebras, J. Phys. A **36**(26), 73377360 (2003).

[32] K. Kosiski, J. Lukierski, P. Malanka, Local field theory on kappa-Minkowski space, *-products and noncommutative translations, Czech. J. Phys. 50 (2000) 1283.

[33] Bayen, F., Flato, M., Fronsdal, C., Lichnerowicz, A., Sternheimer, D.: Deformation Theory and Quantization. Ann. Phys. 111 (1978), 61151.

[34] DeWilde, M., Lecomte, P. B. A.: Existence of Star-Products and of Formal Deformations of the Poisson Lie Algebra of Arbitrary Symplectic Manifolds. Lett. Math. Phys. 7 (1983), 487496.

[35] M. Kontsevich, Deformation quantization of Poisson manifolds, Lett. Math. Phys. 66, 157216 (2003).

[36] Stjepan Meljanac, Saša Krešić Jurić, Tea Martinić, Journal of Mathematical Physics 57, 051704 (2016).

Životopis

Tea Martinić rođena je 12.09.1985. u Splitu gdje je 2004. godine završila Prirodoslovnu-matematičku gimnaziju. Godine 2009. diplomirala je na Fakultetu Prirodoslovno-matematičkih znanosti i kineziologije Sveučilišta u Splitu i stekla zvanje profesora matematike i fizike. Za vrijeme studiranja sudjeluje u izradi članka: Stipanović Petar, Vranješ Markić Leandra, Bešlić Ivana, Martinić Tea Adsorpcija klastera $4HeN$ i $4HeN_3He$ na površini cezija. Od 2010./2011. polaznica je zajedničkog doktorskog studija matematike i članica seminara za algebru. Sudjelovala je na konferenciji Representation Theory XIII Dubrovnik, Hrvatska, 2013. te na konferenciji Representation Theory XIV Dubrovnik, Hrvatska, 2015. gdje je imala izlaganje pod naslovom Realization of Lie algebra and differential calculus on noncommutative spaces. Za vrijeme doktorskog studija sudjelovala je u izradi članka The Weyl realizations of Lie algebras, and left-right duality Stjepan Meljanac, Saša Krešić-Jurić, and Tea Martinić koji je objavljen u Journal of Mathematical Physics. Od Ožujka 2010. je zaposlena kao novak-asistent na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu Sveučilišta u Splitu.